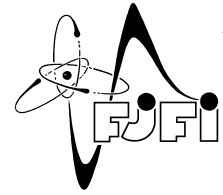




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Matematické metody komplexní dynamiky

Mathematical Methods of Complex Dynamics

Diplomová práce

Autor: **Jakub Malášek**
Vedoucí práce: **prof. Dr. Ing. Michal Beneš**
Akademický rok: 2025/2026

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Malášek** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **502537**
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra matematiky**
Studijní program: **Aplikovaná algebra a analýza**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Matematické metody komplexní dynamiky

Název diplomové práce anglicky:

Mathematical Methods of Complex Dynamics

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš katedra matematiky FJFI

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **12.03.2025**

Termín odevzdání diplomové práce: **05.01.2026**

Platnost zadání diplomové práce: **28.02.2027**

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

podpis proděkana(ky) z pověření děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

_____ Datum převzetí zadání

Bc. Malášek Jakub

_____ Podpis studenta

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Malášek** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **502537**
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra matematiky**
Studijní program: **Aplikovaná algebra a analýza**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Matematické metody komplexní dynamiky

Název diplomové práce anglicky:

Mathematical Methods of Complex Dynamics

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s moderními trendy ve výzkumu této oblasti.
2. Shrňte základní aspekty použití komplexní dynamiky v kvantové teorii informace a komunikace.
3. Objasněte způsoby vyšetřování pevných bodů a vlastnosti Juliových množin na jejich okolí.
4. Zpracujte postupy aproximativního měření dimenzí geometricky složitých množin.
5. Pro zobrazení výše uvedených množin použijte vlastní vizualizační nástroje.

Seznam doporučené literatury:

1. J. Milnor: Dynamics in One Complex Variable, Princeton University Press, Series: Annals of Mathematics Studies, AM-160 - Third Edition, 2006.
2. G.A. Edgar: Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer Verlag, 2nd edition, 2008.
3. Kiss, T., Jex, I., Alber, G., Vymětal, S.; Phys. Rev. A 74, 040301, 2006.
4. M. A. Nielsen, I. L. Chuang: Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, 2010.
5. R. Temam. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1998.

PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

Příjmení, jméno studenta: Malášek Jakub
Osobní číslo: 502537
Název programu: Aplikovaná algebra a analýza

prohlašuji, že jsem diplomovou prací s názvem

Matematické metody komplexní dynamiky

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací a Rámcovými pravidly používání umělé inteligence na ČVUT pro studijní a pedagogické účely v Bc a NM studiu.

Prohlašuji, že jsem v průběhu příprav a psaní závěrečné práce použil nástroje umělé inteligence. Vygenerovaný obsah jsem ověřil. Stvrzuji, že jsem si vědom, že za obsah závěrečné práce plně zodpovídám.

V Praze dne 31.12.2025

Bc. Jakub Malášek

.....
podpis studenta

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli profesoru Michalu Benešovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé diplomové práce.

Název práce:

Matematické metody komplexní dynamiky

Autor: Jakub Malášek

Studijní program: Aplikovaná algebra a analýza

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, katedra matematiky, FJFI ČVUT

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá studiem nelineární dynamiky kvantových purifikačních protokolů. Cílem práce je analyzovat stabilitu těchto protokolů pomocí nástrojů komplexní dynamiky a kvantifikovat geometrické vlastnosti odpovídajících Juliových množin. Obsahuje teoretické základy iterací racionálních funkcí a definice fraktálních dimenzí, zejména Hausdorffovy, mřížkové a korelační. Důležitou součástí je analýza vlivu chybového parametru na stabilitu protokolu a morfologii vznikajících Juliových množin. V práci jsou implementovány a na testovacích množinách porovnány různé algoritmy pro výpočet dimenze, přičemž je diskutována efektivita a přesnost metody Bowenova vzorce oproti standardním geometrickým přístupům. V práci jsou popsány algoritmy pro vizualizaci atraktorů, analýzu pevných bodů a numerický odhad dimenze. Ukazuje se, že metoda založená na Bowenově vzorci poskytuje stabilnější a přesnější odhady dimenze než standardní geometrické metody.

Bowenův vzorec, fraktální dimenze, Hausdorffova dimenze, Juliova množina, komplexní dynamika, korelační dimenze, kvantová purifikace, mřížková dimenze, pevné body

Title:

Mathematical Methods of Complex Dynamics

Author: Jakub Malášek

Abstract: This master's thesis deals with the study of the nonlinear dynamics of quantum purification protocols. The aim of the thesis is to analyze the stability of these protocols using tools of complex dynamics and to quantify the geometric properties of the associated Julia sets. It covers the theoretical foundations of rational function iterations and the definitions of fractal dimensions, specifically the Hausdorff, box-counting, and correlation dimensions. An important part of the work is the analysis of the influence of the error parameter on the protocol's stability and the morphology of the resulting Julia sets. Various algorithms for dimension calculation are implemented and compared on test sets, discussing the efficiency and accuracy of the method based on Bowen's formula in contrast to standard geometric approaches. The thesis describes algorithms for attractor visualization, fixed point analysis, and numerical dimension estimation. The results indicate that the method based on Bowen's formula provides more stable and accurate estimates of the fractal dimension, particularly in non-hyperbolic regimes.

Key words: Bowen's formula, box-counting dimension, complex dynamics, correlation dimension, fixed points, fractal dimension, Hausdorff dimension, Julia set, quantum purification

Obsah

Úvod	9
1 Odvození dynamického systému a základní pojmy	11
1.1 Formulace problému	11
1.2 Obecná unitární transformace	12
1.3 Dynamické vlastnosti indukovaného zobrazení	14
1.4 Purifikace pro systémy více částic	15
2 Juliovy množiny a vlastnosti racionálních zobrazení	16
2.1 Základní vlastnosti Juliových množin	17
2.1.1 Příklad: Kvadratické zobrazení	18
2.1.2 Specifická zobrazení purifikačních protokolů	18
2.2 Lokální vlastnosti Juliových množin	19
2.2.1 Neutrální pevné body	21
2.2.2 Iracionálně neutrální body a Siegelovy disky	21
2.2.3 Cremerovy body	22
2.2.4 Ježci	23
2.2.5 Hledání periodických cyklů	24
2.3 Numerické hledání parametru p pro dané násobitele	25
2.4 Globální vlastnosti a kritické body	28
2.4.1 Kritické body	28
2.4.2 Geometrie Blaschkeho produktů a kvazi-kružnice	29
3 Dimenze Juliových množin	31
3.1 Konstrukce Hausdorffovy dimenze	31
3.2 Numerické odhady dimenze	33
3.3 Box-Counting (Mřížková) dimenze	35
3.3.1 Numerický výpočet mřížkové dimenze	38
3.4 Korelační dimenze	39
3.5 Rényiho dimenze	40
3.6 Další možnosti výpočtu	41
3.6.1 Dimenze náhodné procházky	41
3.6.2 Spektrální dimenze (D_s)	42
3.6.3 Propojení dimenzí: Alexander-Orbachova domněnka	42
3.6.4 Výpočet dynamických dimenzí	43
3.7 Bowenova dimenze	43
3.7.1 Výpočet dimenze	45

4	Vizualizace Juliových množin	47
4.1	Escape time algorithm	47
4.1.1	Modifikace algoritmu	48
4.2	Inverzní iterační metoda (IIM)	51
4.2.1	Matematický princip metody inverzní iterace	51
5	Analýza Juliových množin	55
5.1	Hyperbolické případy	59
5.2	Nehyperbolický případ	65
5.3	Omezení výpočtu dimenze	70
	Závěr	73

Úvod

Kvantové počítače a kvantová teorie informace slibují revoluci v oblasti zpracování dat, kryptografie a simulace fyzikálních systémů. Algoritmy, jako je Shorův faktorizační algoritmus [4] nebo Groverův vyhledávací algoritmus [5], teoreticky nabízejí exponenciální zrychlení oproti svým klasickým protějškům.

K praktické realizaci těchto technologií je však nezbytné udržet kvantový systém v koherentním stavu, což představuje jednu z největších výzev současné fyziky. Reálné kvantové systémy jsou nevyhnutelně vystaveny interakci s okolním prostředím. Tento proces, známý jako dekoherence, vede ke ztrátě kvantové informace a degradaci čistých stavů na stavy smíšené, které lze popsat pomocí matice hustoty [6].

Pokud věrnost stavu klesne pod určitou mez, stává se pro výpočet nepoužitelným. Ačkoliv existují metody kvantové opravy chyb [7], tyto techniky často vyžadují značnou režii v počtu qubitů a hradel. Alternativním a vysoce efektivním přístupem je tzv. kvantová purifikace. Tento koncept, poprvé představený v pracích Bennetta [8] a Deutsche [9], umožňuje extrahovat z velkého souboru zašuměných párů qubitů menší počet párů s vysokou věrností. Základní myšlenkou je iterativní aplikace unitárních operací (např. CNOT hradla) na dva exempláře poškozeného stavu, následovaná měřením jednoho z nich. Na základě výsledku měření je druhý pár buď ponechán a jeho čistota se zvýšila, nebo zahozen.

Z matematického hlediska lze tento rekurentní proces popsat jako diskrétní dynamický systém. Stav qubitu v kroku $n + 1$ je dán nelineární funkcí stavu v kroku n . Právě tato nelinearita, způsobená procesem měření a selekce, vede k bohaté dynamice.

V komplexní rovině, kde parametrizujeme stav qubitu, se hranice mezi oblastí konvergence (úspěšná purifikace) a oblastí divergence projevuje jako Juliova množina.

Ačkoliv základy teorie iterace racionálních funkcí, a tedy i teorie Juliovy množiny, položili Gaston Julia a Pierre Fatou již na počátku 20. století, skutečnou renesanci zažil tento obor až s nástupem výpočetní techniky a později s aplikacemi v teoretické fyzice. V kontextu kvantových purifikačních protokolů, kterými se zabývá tato práce, nabývají Juliovy množiny zcela nového, fyzikálního významu.

Jak ukazují práce v oblasti nelineární dynamiky [12][13], Juliova množina $J(f)$ tvoří přirozenou hranici v prostoru stavů. Odděluje tzv. oblast přitažlivosti žádoucího čistého stavu od oblastí, kde protokol diverguje nebo konverguje k nechtěným stavům. Moderní analýza těchto množin se proto nesoustředí pouze na jejich topologii, ale především na jejich strukturální stabilitu.

Klíčovým pojmem moderní teorie je hyperbolicita. Racionální zobrazení je na své Juliově množině hyperbolické, pokud derivace iterací v okolí této množiny roste exponenciálně. Pro fyzikální aplikace je tento fakt zásadní, jelikož pokud je dynamika hyperbolická, systém je strukturálně stabilní, což znamená, že malé poruchy (šum v hradlech nebo nepřesnosti v rotaci $U(\theta, \varphi)$) nezmění drasticky kvalitativní chování systému [14].

Naopak v blízkosti tzv. parabolických bodů nebo v případech, kdy Juliova množina obsahuje kritické body, se dynamika stává extrémně citlivou. Studium fraktální dimenze těchto množin tak neslouží jen k popisu jejich drsnosti, ale dává nám přímou informaci o míře neurčitosti a riziku selhání purifikace vlivem vnějších perturbací.

Zatímco původní návrhy purifikačních protokolů uvažovaly fixní unitární operace, současný výzkum [15] se zaměřuje na složitější scénáře, které lépe odpovídají reálným experimentálním podmínkám nebo hybridním kvantovým sítím. V těchto případech se ukazuje, že dynamika purifikace vykazuje znaky kvantového chaosu.

Nejnovější poznatky, shrnuté například v práci Malachova [3], propojují teorii Juliových množin s teorií náhodných matic. Ukazuje se, že pokud jsou lokální unitární rotace v protokolu vybírány náhodně (například z CUE – Circular Unitary Ensemble), statistické vlastnosti systému, jako je rozložení vlastních čísel evolučního operátoru, vykazují univerzální chování.

V tomto kontextu přestává být Juliova množina pouze geometrickou kuriozitou a stává se klíčovým prediktorem pro efektivitu protokolu. Moderní studie [18] [19] naznačují existenci tzv. fraktálních Weylových zákonů pro otevřené kvantové mapy. Tyto zákony dávají do souvislosti Hausdorffovu dimenzi invariantní množiny (v našem případě Juliovy množiny) s počtem dlouho žijících metastabilních stavů.

Zkoumání dimenze Juliových množin, které je předmětem této práce, tak má přímý přesah do optimalizace kvantových sítí. Vyšší fraktální dimenze hranice stability totiž v řeči kvantového chaosu implikuje složitější fázový prostor, kde může docházet k nežádoucímu uvíznutí stavu v blízkosti hranice, což zpomaluje konvergenci k čistému stavu. Porozumění této geometrii je tedy nezbytné pro návrh robustních protokolů odolných vůči fluktuacím.

Kapitola 1

Odvození dynamického systému a základní pojmy

Kvantová teorie informace a vývoj kvantových počítačů představují v posledních desetiletích jednu z nejrychleji se rozvíjejících oblastí moderní fyziky a informatiky. Zatímco klasické počítače operují s bity, které nabývají hodnot 0 nebo 1, kvantové počítače využívají tzv. qubity. Ty mohou díky principu superpozice existovat v libovolné lineární kombinaci bázeových stavů, což teoreticky umožňuje exponenciální zrychlení výpočtů pro určité třídy úloh, jako je faktorizace velkých čísel nebo simulace kvantových systémů.

Zásadní překážkou pro praktickou realizaci kvantových výpočtů je však interakce s okolním prostředím, která vede k procesu zvanému dekoherence. Tento jev způsobuje ztrátu kvantové informace a degradaci čistých stavů na stavy smíšené. Aby bylo možné provádět spolehlivé výpočty, je nezbytné mít k dispozici metody, které dokáží chybovost potlačit. Vedle komplexních kvantových samoopravných kódů hrají významnou roli tzv. purifikační protokoly (entanglement purification protocols), které umožňují z více kopií zašuměných stavů extrahovat stavy s vyšší věrností (fidelity).

Tato práce se zaměřuje na matematickou analýzu specifické třídy těchto protokolů. Ukážeme, že iterativní aplikace purifikačního kroku lze přirozeně modelovat jako diskrétní dynamický systém na Riemannově sféře. Studium stability těchto protokolů tak přímo vede k úlohám komplexní dynamiky, konkrétně k analýze Juliovy množiny racionálních zobrazení. V této kapitole nejprve formálně zavedeme fyzikální model jednoho qubitu a odvodíme příslušné rekurentní zobrazení, jehož vlastnosti budeme v dalším textu zkoumat

1.1 Formulace problému

Pro pochopení vzniku dynamického systému, který je předmětem této práce, je nutné vyjít z konkrétního fyzikálního protokolu pro opravu chyb. Uvažujme standardní scénář v kvantové komunikaci, kdy se snažíme přenést stav qubitu, ale vlivem šumu v komunikačním kanálu dochází k jeho degradaci. Cílem purifikace je zvýšit věrnost tohoto stavu vůči ideálnímu stavu $|0\rangle$. Protokol, kterým se budeme zabývat, využívá nelineární operace nad dvěma kopiemi téhož stavu, vycházíme z [8]. Základní myšlenka spočívá v tom, že vezmeme dva poškozené qubity a provedeme mezi nimi logickou operaci (např. CNOT), která přenesou část informace o chybě z jednoho qubitu na druhý. Následným změřením druhého qubitu získáme informaci o tom, zda k chybě došlo. Pokud měření dopadne příznivě, první qubit si ponecháme, přičemž jeho stav je nyní čistší (blíže k $|0\rangle$). Pokud tento proces opakujeme iterativně, stav qubitu v čase $n + 1$ závisí na jeho stavu v čase n . Tímto způsobem přecházíme od fyzikálního popisu k matematickému

modelu iterovaného zobrazení $z_{n+1} = f(z_n)$. Následující odvození ukazuje, jak konkrétní volba unitárních operací v protokolu vede k racionálním lomeným funkcím v komplexní rovině. Uvažujme stav jednoho qubitu poškozeného vlivem prostředí. Původní stav $|0\rangle$ přechází do obecného stavu

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{|z|^2 + 1}}(|0\rangle + z|1\rangle), \quad (1.1)$$

kde $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \varepsilon$ pro malé ε . Cílem je získat zpět stav $|0\rangle$.

K tomuto účelu využijeme tzv. purifikační protokol, který funguje následovně: Uvažujme neprovázaný stav systému se dvěma qubity v obecném tvaru popsaném výše, neboli:

$$|\Psi_{in}\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle = \frac{1}{|z|^2 + 1}(|00\rangle + z|01\rangle + z|10\rangle + z^2|11\rangle).$$

Po aplikaci brány CNOT přejde tento stav v provázaný stav následujícího tvaru:

$$|\Psi_{out}\rangle = \mathbf{C}_{NOT}|\Psi_{in}\rangle = \frac{1}{|z|^2 + 1}(|00\rangle + z|01\rangle + z|11\rangle + z^2|10\rangle).$$

Provedeme měření druhého qubitu, které projektuje na stav $|0\rangle$, získáme první iteraci protokolu. Výsledný stav je

$$\frac{1}{\sqrt{|z|^4 + 1}}(|00\rangle + z^2|10\rangle),$$

kde jsme amplitudy upravili tak, aby odpovídaly normalizační podmínce. Z čehož můžeme už extrahovat stav prvního qubitu:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{|z|^4 + 1}}(|0\rangle + z^2|1\rangle).$$

Zde je patrné, že transformace amplitudy odpovídá zobrazení

$$z \mapsto z^2.$$

Iterace tohoto procesu postupně vedou ke konvergenci k nule, pokud $|z| < 1$, tj. stav se blíží k $|0\rangle$. Pokud však $|z| > 1$, iterace divergují k nekonečnu, což odpovídá stavu $|1\rangle$. Na jednotkové kružnici zůstávají iterace na místě, bez konvergence.

1.2 Obecná unitární transformace

Do základního purifikačního schématu (dvě identické kopie qubitu, brána CNOT, následné měření druhého qubitu) zavádíme navíc lokální unitární operaci

$$U(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\varphi} \\ -\sin \theta e^{-i\varphi} & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \pi/2), \varphi \in [0, 2\pi).$$

Tento případ rozšiřuje jednoduchou transformaci $z \mapsto z^2$ a vede k racionálnímu zobrazení na rozšířené komplexní rovině; níže ji odvodíme explicitně

Pokračujme v odvozování z předchozí části. Vycházíme ze stavu po CNOT, tj.:

$$|\Psi_{\text{CNOT}}\rangle = \frac{1}{1 + |z|^2}(|00\rangle + z|01\rangle + z^2|10\rangle + z|11\rangle).$$

Aplikace unitární transformace $U(\theta, \varphi)$ na první qubit

Nyní aplikujeme unitární matici $U(\theta, \varphi)$ na první qubit (tj. operátor $U \otimes I$ na dvouqubitový stav). Pro přehlednost si zapíšeme jednotlivé koeficienty stavu po CNOT:

stav vektor	koef.
$ 00\rangle$	$c_{00} = 1$
$ 01\rangle$	$c_{01} = z$
$ 10\rangle$	$c_{10} = z^2$
$ 11\rangle$	$c_{11} = z$

Po aplikaci $U \otimes I$ se každý člen $|i, j\rangle$ s koeficientem c_{ij} vypočte podle:

$$(U \otimes I)|i, j\rangle = \sum_{k=0}^1 U_{k,i} |k, j\rangle.$$

Z toho nás zajímají amplitudy stavů, u kterých je druhý qubit $|0\rangle$ (protože na něj následně projektujeme). Nové amplitudy pro bázi $|0\rangle \otimes |0\rangle$ a $|1\rangle \otimes |0\rangle$ jsou:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &:= \text{koef. u } |0\rangle \otimes |0\rangle = c_{00}u_{00} + c_{10}u_{10}, \\ \tilde{\beta} &:= \text{koef. u } |1\rangle \otimes |0\rangle = c_{00}u_{01} + c_{10}u_{11},\end{aligned}$$

kde komponenty U jsou podle zápisu výše:

$$u_{00} = \cos \theta, \quad u_{01} = \sin \theta e^{i\varphi}, \quad u_{10} = -\sin \theta e^{-i\varphi}, \quad u_{11} = \cos \theta.$$

Dosazením $c_{00} = 1$, $c_{10} = z^2$ dostáváme

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= c_{00}U_{00} + c_{10}U_{10} = 1 \cdot \cos \theta + z^2 \cdot (-\sin \theta e^{-i\varphi}) = \cos \theta - z^2 \sin \theta e^{-i\varphi}, \\ \tilde{\beta} &= c_{00}U_{01} + c_{10}U_{11} = 1 \cdot \sin \theta e^{i\varphi} + z^2 \cdot \cos \theta = z^2 \cos \theta + \sin \theta e^{i\varphi}.\end{aligned}$$

Projekce druhého qubitu na $|0\rangle$ a výsledné zobrazení

Po projekci druhého qubitu na $|0\rangle$ zůstane první qubit s nenormalizovanými amplitudami $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$. Poměr amplitud je tedy

$$z' = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} = \frac{z^2 \cos \theta + \sin \theta e^{i\varphi}}{\cos \theta - z^2 \sin \theta e^{-i\varphi}}.$$

Dále vydělíme čitatele i jmenovatele $\cos \theta$ a zavedeme parametr

$$p := \tan \theta e^{i\varphi}.$$

Po této úpravě dostaneme elegantní tvar racionální funkce

$$f_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^* z^2}, \quad \text{kde } p = \tan \theta e^{i\varphi} \text{ a } p^* = \bar{p}.$$

Výpočet ukazuje, že volbou parametru (θ, φ) (tedy volbou unitární brány U) dostáváme množinu racionálních zobrazení f_p stupně 2; jejich dynamika (atraktory, Juliovy množiny, kritické body) závisí citlivě na komplexním parametru p .

Je důležité zdůraznit fyzikální interpretaci komplexní proměnné z , jejíž dynamiku zde zkoumáme. V kontextu kvantové informace nás primárně zajímá tzv. věrnost (fidelity) F , která kvantifikuje míru shody aktuálního stavu $|\psi\rangle$ s cílovým čistým stavem, v našem případě stavem $|0\rangle$. Věrnost je definována jako kvadrát absolutní hodnoty skalárního součinu těchto stavů, tedy $F = |\langle 0|\psi\rangle|^2$. Dosazením z rovnice 1.1 dostáváme přímý vztah mezi souřadnicí z a měřenou kvalitou stavu:

$$F(z) = \left| \left\langle 0 \left| \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} (|0\rangle + z|1\rangle) \right. \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{1+|z|^2}.$$

Z tohoto vztahu je patrné, že konvergence $z \rightarrow 0$ (pevný bod zobrazení) odpovídá konvergenci $F \rightarrow 1$ (perfektní purifikace). Naopak, pokud $z \rightarrow \infty$, klesá věrnost k nule. Studium stability pevného bodu $z = 0$ je tedy ekvivalentní studiu schopnosti protokolu dosáhnout maximální věrnosti.

Krátké poznámky

- Pro $p = 0$ (tedy $\theta = 0$) se vracíme k původnímu jednoduchému zobrazení $f_0(z) = z^2$.
- Stupně a stabilita pevných bodů, kritické body a Juliovy množiny pro f_p lze studovat standardními nástroji komplexní dynamiky. Kritické body (kde $f'_p(z) = 0$) a jejich orbity rozhodují o topologii Fatouovy a Juliovy množiny.

Poznámka: výše uvedený odvozený krok (CNOT \rightarrow aplikace U na první qubit \rightarrow projekce druhého qubitu) poskytuje přímý a transparentní matematický důvod, proč se v kontextu purifikačních protokolů objevují právě tato racionální zobrazení f_p . Více ilustrací a numerických příkladů lze nalézt v textu [21] a [3].

1.3 Dynamické vlastnosti indukovaného zobrazení

Iterace transformace f_p představují diskrétní dynamický systém. Z matematického hlediska se jedná o iteraci racionálních funkcí, což je centrální téma komplexní dynamiky. Dlouhodobé chování takových iterací lze popsat pomocí pojmů jako jsou pevné body, periodické body, atraktory a invariantní množiny.

Zvláště důležitou roli hrají Juliovy množiny $J(f_p)$, které oddělují oblasti konvergence k různým atraktorům. Tyto množiny mají často fraktální strukturu a jejich studium je klíčové pro pochopení stability či nestability purifikačního protokolu.

Parametr

$$p = \tan(x)e^{i\phi}$$

má přímý fyzikální význam, protože reprezentuje lokální unitární rotaci qubitu aplikovanou mezi jednotlivými kroky purifikačního protokolu. Jeho velikost určuje míru rotace, zatímco fáze ϕ udává směr rotace na Blochově kouli. Jinými slovy, p popisuje, jak se základní stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$ směřují do superpozic. Například hodnota $p = 1$ odpovídá rotaci o $\pi/4$, která převádí bázi na stejnou superpozici, tedy na stav symetrický vůči oběma bázevým vektorům. Volba p tak určuje charakter výsledného nelineárního zobrazení

$$F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^*z^2},$$

a tím i dynamiku celého protokolu.

1.4 Purifikace pro systémy více částic

Pro analýzu složitější dynamiky v komplexní rovině je přirozeným krokem přechod od dvoučásticových systémů k vícečásticovému provázání, které reprezentují tzv. GHZ stavy (Greenberger-Horne-Zeilinger). Pro N qubitů je tento stav definován jako superpozice

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}).$$

Základní purifikační protokoly pro tyto stavy zavedli Murao et al. [39]. Dynamika věrnosti x_n se v rámci protokolu při uvažování chybového parametru p řídí nelineárním zobrazením:

$$x_{n+1} = f_p(x_n) = \frac{x_n^2(1-p)^{2N} + C_N(1-x_n)^2 p^{2N}}{D(x_n, p)},$$

kde $D(x_n, p)$ je normalizační faktor a člen C_N závisí na počtu částic N . S rostoucím N se oblast konvergence dramaticky zmenšuje, což bylo později podrobně analyzováno a zobecněno pro třídu grafových stavů v práci Dür et al. [40].

Významnou třídu vícečásticově provázaných stavů představují grafové stavy. Tyto stavy nabízejí robustní matematický rámec pro popis provázání pomocí teorie grafů, kde vrcholy grafu $G = (V, E)$ reprezentují fyzické qubity a hrany odpovídají interakcím mezi nimi [16].

Grafový stav $|G\rangle$ je definován konstruktivním způsobem. Systém N qubitů je nejprve připraven v produktovém stavu $|+\rangle^{\otimes N}$, kde $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Následně je na každou dvojici qubitů $\{a, b\}$, která je v grafu spojena hranou $e \in E$, aplikována unitární operace, která v bázi výpočetních stavů odpovídá $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Tento proces lze formálně zapsat jako:

$$|G\rangle = \prod_{a,b \in E} U^{(a,b)} |+\rangle^{\otimes V}.$$

Z hlediska klasifikace provázání lze na grafové stavy nahlížet jako na přímé a široké zobecnění GHZ stavů. Zatímco GHZ stavy představují specifický typ maximálně provázaných stavů, v řeči grafů odpovídají (až na lokální unitární transformace) grafům s topologií hvězdy, kde je jeden centrální qubit spojen se všemi ostatními, případně grafům úplným více v [16].

Grafové stavy, včetně klastrových stavů, dnes tvoří základní zdroj pro měření řízené kvantové počítání a hrají klíčovou roli v teorii kvantových opravných kódů [16, 17].

Zatímco výše popsany model pracuje s fixním analytickým předpisem $f(z)$, který je dán fyzikální konstrukcí protokolu (série CNOT hradel a měření), moderní výzkum ukazuje, že tento klasický tvar nemusí být optimální. Zde můžeme zmínit aktuální práci [41], nebo obecnější [42] která přistupují k problému purifikace GHZ stavů inverzně.

Místo analýzy stability daného protokolu využívají variační kvantové algoritmy (VQA) k tomu, aby optimální iterační funkci našli (natrénovali). Jejich přístup lze interpretovat jako hledání takového zobrazení $z_{n+1} = \mathcal{G}_\theta(z_n)$, parametrizovaného vektorem θ parametry kvantového obvodu, které maximalizuje objem atraktoru náležícího k čistému stavu. Tímto způsobem dokáží nalézt purifikační mapy, které jsou robustnější vůči šumu p než standardní analytické protokoly, jejichž fraktální vlastnosti budeme zkoumat v tomto textu.

Kapitola 2

Juliovy množiny a vlastnosti racionálních zobrazení

V předchozí části jsme ukázali, že vývoj stavu qubitu v purifikačním protokolu je popsán iterací racionální funkce f_p . Abychom pochopili, za jakých podmínek protokol funguje (tj. kdy stav konverguje k cílovému čistému stavu) a kdy selhává, musíme analyzovat stabilitu těchto iterací v komplexní rovině. Klíčovým nástrojem pro rozlišení oblastí se stabilním (konvergentním) a chaotickým chováním jsou pojmy Fatouova a Juliova množina.

V této kapitole se budeme zabývat základní teorií *Juliových množin* komplexních racionálních zobrazení. Budeme uvažovat racionální zobrazení

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}},$$

kde $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je Riemannova sféra a f je holomorfní zobrazení dané podílem dvou polynomů bez společných kořenů. Označíme $f^{\circ n}$ n -tou iterací zobrazení f . Pro tyto množiny můžeme použít následující 2 ekvivalentní definice. Ekvivalence je ukázána například v [20].

Definice 2.1. Necht' $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ je racionální zobrazení na Riemannově sféře. *Fatouova množina* $F(f)$ je maximální otevřená podmnožina $\hat{\mathbb{C}}$, na níž množina iterací $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ tvoří normální rodinu holomorfních zobrazení.

Juliova množina $J(f)$ je komplement množiny $F(f)$ v $\hat{\mathbb{C}}$, tj.

$$J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f).$$

Definice 2.2. Necht' S je Riemannova plocha a $f : S \rightarrow S$ je nekonstantní holomorfní zobrazení. Označme $f^{\circ n} : S \rightarrow S$ jeho n -tou iterací a zafixujme bod $z_0 \in S$. Pak platí jedno z:

- Pokud existuje okolí U bodu z_0 , na němž posloupnost iterací $\{f^{\circ n}\}$ tvoří normální množinu, pak říkáme, že z_0 je *regulární (nebo normální) bod*, neboli že z_0 patří do *Fatouovy množiny* zobrazení f .
- Pokud takové okolí neexistuje, říkáme, že z_0 patří do *Juliovy množiny* $J = J(f)$.

Fatouova množina je tvořena body, ve kterých je chování iterací stabilní, zatímco Juliova množina zachycuje oblasti nestability a chaotické dynamiky. Pro racionální zobrazení stupně alespoň 2 mají tyto množiny bohatou a složitou strukturu.

Poznámka 2.3. Z definic je zřejmé, že množiny $F(f)$ a $J(f)$ jsou disjunktní a jejich sjednocení pokrývá celou Riemannovu sféru:

$$F(f) \cap J(f) = \emptyset, \quad F(f) \cup J(f) = \hat{\mathbb{C}}.$$

Množina $F(f)$ je otevřená a množina $J(f)$ je uzavřená.

2.1 Základní vlastnosti Juliových množin

Věta 2.4 (Vlastnosti Juliových a Fatouových množin). *Nechť $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ je racionální zobrazení. Pak platí:*

1. *Juliova množina je uzavřená a komplementární Fatouova množina je otevřená.*
2. *Juliova množina je úplně invariantní vzhledem k zobrazení f :*

$$f(J(f)) = J(f) = f^{-1}(J(f)),$$

3. *Totéž platí pro Fatouovu množinu:*

$$f(F(f)) \subseteq F(f), \quad f^{-1}(F(f)) \subseteq F(f).$$

Věta 2.5. *Pro racionální zobrazení $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ stupně většího nebo rovného 2 platí následující:*

1. **Juliova množina $J(f) \neq \emptyset$.**

Důkaz. Nechť f je racionální zobrazení stupně $d \geq 2$. Potom f^{on} má stupeň d^n . Pokud $\{f^{on}\}_{n \geq 0}$ tvoří normální množinu funkcí na celé $\hat{\mathbb{C}}$, pak nějaká podmnožina $\{f^{on_j}\}_{j \geq 1}$ konverguje lokálně stejnoměrně k funkci g . Protože $\hat{\mathbb{C}}$ je kompaktní, existuje J , že pro všechna $j > J$ a $z \in \hat{\mathbb{C}}$ platí $d(f^{on_j}(z), g(z)) < \pi/2$ ve sférické metrice. To vede ke sporu s $n_j \rightarrow \infty$.

2. **Juliova množina $J(f)$ je nekonečná.**

Důkaz. Podle důsledku jsou jediné možnosti pro konečné úplně invariantní množiny (až na konjugaci) množiny $\{\infty\}$ nebo $\{\infty, 0\}$. Tyto výjimečné množiny však patří do Fatouovy množiny.

3. **Juliova množina $J(f)$ je nejmenší úplně invariantní uzavřená množina obsahující alespoň tři body.**

Důkaz. Doplněk úplně invariantní uzavřené množiny obsahující alespoň tři body je otevřená úplně invariantní množina, která vynechává alespoň tři body, a proto je obsažena ve Fatouově množině podle Montelovy věty.

4. **Juliova množina $J(f)$ je perfektní.**

Důkaz. Označme J_0 množinu hromadných bodů $J(f)$. J_0 je neprázdná, uzavřená a úplně invariantní. J_0 nemůže být konečná, protože by byla výjimečná, a tedy patřila do $F(f)$. Z toho plyne $J_0 = J(f)$.

5. **Juliova množina $J(f)$ je buď celá $\hat{\mathbb{C}}$, nebo má prázdný vnitřek.**

Důkaz. Označme $S = \hat{\mathbb{C}} - \text{int}(J)$. S je sjednocením Fatouovy množiny F a hranice ∂J množiny J . S je buď prázdná, nebo obsahuje $J(f)$.

2.1.1 Příklad: Kvadratické zobrazení

Klasickým příkladem jsou kvadratická zobrazení

$$q_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Jejích Juliovy množiny jsou úzce spojeny s tzv. *Mandelbrotovou množinou*:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(q_c) \text{ je souvislá}\}.$$

Pokud $c \in M$, je Juliova množina souvislá; pokud $c \notin M$, je Juliova množina Cantorovského typu (homeomorfní Cantorově množině). Pro $c = 0$ je $J(q_0)$ jednotková kružnice, pro $c = -2$ je Juliova množina interval $[-2, 2]$. Více lze nalézt například ve [20].

2.1.2 Specifická zobrazení purifikačních protokolů

V předchozí sekci jsme ilustrovali vlastnosti Juliovy množiny na klasickém kvadratickém polynomu $q_c(z) = z^2 + c$. V této práci se však primárně zabýváme dynamikou racionálního zobrazení odvozeného v kapitole 1.2:

$$f_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^*z^2}.$$

Toto zobrazení vykazuje zásadní dynamické odlišnosti oproti polynomům, což má přímý dopad na geometrickou interpretaci a vizualizaci příslušných Juliovy množiny.

Klíčovým rozdílem je chování zobrazení v bodě nekonečno. U polynomů stupně $d \geq 2$, jako je $z^2 + c$, je bod ∞ vždy atraktivním pevným bodem. To znamená, že existuje okolí nekonečna, z něhož všechny body unikají do ∞ . Díky tomu můžeme u polynomů Juliovu množinu definovat jednoduše jako hranici množiny bodů, které neunikají do nekonečna (tzv. vyplněná Juliova množina).

Pro naše racionální zobrazení f_p (kde $p \neq 0$) však tato vlastnost neplatí. Podívejme se na limitní chování pro $z \rightarrow \infty$:

Abychom mohli korektně analyzovat chování funkce v bodě ∞ a jeho okolí, využijeme vlastností Riemannovy sféry $\widehat{\mathbb{C}}$. Zavedeme lokální souřadnici $w = 1/z$, která převádí okolí bodu ∞ v rovině z na okolí bodu 0 v rovině w . Pro určení obrazu bodu ∞ zkoumáme chování složeného zobrazení

$$g(w) = f_p(1/w)$$

v limitě $w \rightarrow 0$. Dosazením do předpisu 1.2 a následnou úpravou rozšířením výrazem w^2 dostáváme:

$$\lim_{w \rightarrow 0} g(w) = \lim_{w \rightarrow 0} f_p\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^2 + p}{1 - p^*\left(\frac{1}{w}\right)^2} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1 + pw^2}{w^2 - p^*} = -\frac{1}{p^*}.$$

Z výsledku je patrné, že bod ∞ není pro obecné $p \neq 0$ pevným bodem zobrazení (jako je tomu u polynomů), ale je mapován do konečného bodu $z = -1/p^*$. Dynamika systému tedy není omezena na konečnou část roviny; trajektorie mohou procházet skrze nekonečno a vracet se zpět do komplexní roviny.

Z tohoto důvodu nelze v případě purifikačního protokolu dynamiku omezit pouze na komplexní rovinu \mathbb{C} . Nekonečno zde není izolovaným atraktorem vně systému, ale je plnohodnotným bodem, skrze který trajektorie systému dynamicky procházejí. Bod může být v jednom kroku konečný, v druhém se zobrazit do nekonečna a ve třetím se vrátit zpět do komplexní roviny (do okolí $-1/p^*$).

Pro korektní matematický popis a vizualizaci je proto nezbytné pracovat na Riemannově sféře $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Juliova množina $J(f_p)$ v tomto případě netvoří hranici mezi omezenou oblastí a oblastí úniku do nekonečna, ale odděluje složitější oblasti konvergence k různým atraktorům na sféře. To ospravedlňuje použití stereografické projekce nebo přímé vizualizace na sféře v následujících kapitolách, jelikož planární zobrazení by nutně vedlo k vizuálním artefaktům v okolí pólů a bodu v nekonečnu.

2.2 Lokální vlastnosti Juliových množin

Klíčem k pochopení dynamiky racionálního zobrazení $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ je analýza jeho pevných a periodických bodů. Tyto body tvoří elementární prvky dynamiky a jejich stabilita určuje chování množiny na jejich okolí.

Definice 2.6 (Pevný bod a periodický bod). Bod $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ se nazývá pevným bodem zobrazení f , jestliže platí:

$$f(z_0) = z_0.$$

Bod z_0 se nazývá periodickým bodem s periodou n (kde $n \geq 1$), jestliže platí:

$$f^{\circ n}(z_0) = z_0$$

a zároveň $f^{\circ k}(z_0) \neq z_0$ pro všechna $0 < k < n$.

Množina bodů $\{z_0, f(z_0), f^{\circ 2}(z_0), \dots, f^{\circ(n-1)}(z_0)\}$ tvoří tzv. orbitu periodického bodu. Každý bod cyklu je rovněž periodickým bodem se stejnou periodou n . Pevný bod je speciálním případem periodického bodu s periodou $n = 1$.

Chování iterací v blízkém okolí pevného bodu z_0 je určeno derivací zobrazení v tomto bodě. Tuto hodnotu nazýváme multiplikátor periodického bodu a značíme jej λ .

Poznámka 2.7. Pokud je $z_0 = \infty$, je nutné provést transformaci souřadnic $w = 1/z$ a vyšetřit derivaci transformovaného zobrazení v nule.

Pro periodický bod z_0 s periodou n tvořící cyklus $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_0$ je násobitel definován jako derivace n -té iterace:

$$\lambda = (f^{\circ n})'(z_0).$$

Díky řetízkovému pravidlu pro derivování platí, že násobitel je roven součinu derivací v jednotlivých bodech cyklu:

$$\lambda = \prod_{i=0}^{n-1} f'(z_i).$$

Z toho plyne důležitá vlastnost: násobitel je pro všechny body téhož cyklu stejný.

Na základě absolutní hodnoty násobitele $|\lambda|$ dělíme pevné a periodické body do tří základních kategorií:

Definice 2.8 (Klasifikace periodických bodů). Necht' $\lambda \in \hat{\mathbb{C}}$ je multiplikátor periodického bodu z_0 pro zobrazení $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Pak pro periodické body zavádíme následující dělení:

- Pokud $\lambda = 0$, pak periodický bod nazveme superatraktivní.
- Pokud $0 < |\lambda| < 1$, pak periodický bod nazveme atraktivní (atraktory).
- Pokud $|\lambda| > 1$, pak periodický bod nazveme odpuzující (repelery).

- Pokud $|\lambda| = 1$, pak periodický bod nazveme neutrální.
 1. Pokud pro neutrální periodický bod platí, že $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{Q}$, pak jej nazveme parabolický.
 2. V opačném případě je nazveme iracionální pevné body.

U atraktivních bodů tvoří množina bodů, které k cyklu konvergují, Basin of Attraction, můžeme přeložit jako oblast přitažlivosti. Tato množina je otevřená a je součástí Fatouovy množiny $F(f)$. Z hlediska aplikací v kvantové teorii informace je klíčový případ superatraktivního bodu. V jeho okolí je konvergence alespoň kvadratická, což zajišťuje robustní potlačení chyb. Typickým příkladem je bod $z = 0$ pro zobrazení $z \rightarrow z^2$. Pokud platí $0 < |\lambda| < 1$, máme k dispozici pouze lineární konvergenci.

Odpuzující body představují nestabilní oblasti množin, tedy hodnoty od kterých jsou okolní body iteracemi vytlačovány. Tyto body hrají zásadní roli v topologické charakterizaci chaosu. Platí věta, že Juliaova množina je uzávěrem množiny všech odpuzujících periodických bodů, neboli, že množina těchto bodů je hustá v $J(f)$ [1].

Chování dynamického systému v okolí pevných bodů není pouze popisné, ale lze jej matematicky rigorózně odvodit pomocí tzv. *teorie linearizace*. Jak uvádí Milnor [1], lokální chování holomorfního zobrazení f v blízkosti pevného bodu z_0 s multiplifikátorem $\lambda = f'(z_0)$ je (s výjimkou speciálních případů) konformně ekvivalentní lineárnímu zobrazení $w \mapsto \lambda w$.

Pro atraktivní a odpuzující pevné body platí Koenigsův teorém. Tento teorém nám umožňuje nahlížet na složitou dynamiku f jako na prosté násobení komplexním číslem λ v nových souřadnicích.

Věta 2.9 (Koenigsův linearizační teorém). *Necht' z_0 je pevný bod holomorfního zobrazení f s multiplifikátorem $\lambda = f'(z_0)$, pro který platí $|\lambda| \neq 0, 1$. Pak existuje v okolí bodu z_0 lokální holomorfní změna souřadnic ϕ taková, že $\phi(z_0) = 0$ a platí tzv. Schröderova rovnice:*

$$\phi(f(z)) = \lambda \cdot \phi(z).$$

Geometricky to znamená, že orbity v blízkosti z_0 se spirálovitě přibližují (nebo vzdalují) po logaritmických spirálách určených argumentem λ .

Speciální a pro naši práci důležitý případ nastává, když $\lambda = 0$, například u funkce $f(z) = z^2$. To odpovídá superatraktivním bodům, které jsou zároveň kritickými body zobrazení ($f'(z_0) = 0$). Zde lineární aproximace selhává.

Věta 2.10 (Böttcherova věta). *Necht' z_0 je superatraktivní pevný bod, kde f má nulu řádu $f^{\circ j}(z_0) = 0$ pro $1 \leq j < k$ a $f^{\circ k}(z_0) \neq 0$. Pak existuje lokální souřadnice ϕ , ve které má zobrazení tvar mocninné funkce:*

$$\phi(f(z)) = (\phi(z))^k.$$

V kontextu zobrazení $f_p(z)$ může bod $z = \infty$ vykazovat právě toto chování, v závislosti na parametru p , což vede k extrémně rychlé konvergenci orbit a vzniku rozsáhlých oblastí přitažlivosti.

Na hranici stability ($|\lambda| = 1$) je situace nejsložitější. Pokud je multiplifikátor kořenem jedničky ($\lambda = e^{2\pi i p/q}$), hovoříme o parabolickém pevném bodě.

Zobrazení zde není linearizovatelné. Místo toho se v okolí bodu formuje geometrická struktura zvaná *Leau-Fatouova květina*. Ta se skládá z q přitahujících směrů (kde se orbity asymptoticky blíží k z_0) a q odpuzujících směrů.

2.2.1 Neutrální pevné body

Třída neutrálních pevných bodů, pro které platí $|\lambda| = 1$, představuje z hlediska dynamiky nejsložitější případ. Na rozdíl od atraktorů a repelerů, kde je chování v lokálním okolí určeno multiplifikátorem derivace, zde o stabilitě rozhoduje argument kořene jedničky α a nelineární členy Taylorova rozvoje.

Rozlišujeme dva kvalitativně odlišné případy podle toho, zda je argument α racionálním nebo iracionálním násobkem 2π .

Definice 2.11 (Parabolický bod). Pevný bod z_0 nazveme *parabolickým*, jestliže jeho multiplifikátor $\lambda = f'(z_0)$ je tvaru $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla.

V okolí takového bodu nelze zobrazení linearizovat (neexistuje konformní záměna souřadnic, která by f převedla na rotaci $z \mapsto \lambda z$). Místo toho je lokální dynamika popsána větou o Leau-Fatouově květině, kterou detailně rozebírá Milnor.

Věta 2.12 (O Leau-Fatouově květině). *Necht' z_0 je parabolický pevný bod s násobností $k + 1$ (tj. z_0 je k -násobným kořenem rovnice $f(z) - z = 0$). Pak v okolí z_0 existuje $k \cdot q$ přitahujících směrů, po kterých orbity konvergují k z_0 , a stejný počet odpuzujících směrů, kterými orbity bod z_0 opouštějí.*

Parabolické body leží vždy na hranici Juliovy množiny ($z_0 \in J(f)$) a jejich význam je důležitý pro bifurkace, kdy dochází ke sloučení nebo vzniku nových periodických cyklů.

2.2.2 Iracionálně neutrální body a Siegelovy disky

Druhým případem je situace, kdy $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je iracionální číslo. Zde vyvstává *problém linearizace*: existuje na okolí z_0 holomorfní změna souřadnic ϕ , která převádí f na iracionální rotaci?

$$\phi(f(z)) = e^{2\pi i \alpha} \cdot \phi(z).$$

Pokud taková linearizace existuje, bod z_0 je středem stabilní oblasti ve Fatouově množině, kterou můžeme definovat následovně:

Definice 2.13 (Siegelův disk). Pokud je zobrazení f v okolí iracionálně neutrálního pevného bodu z_0 holomorfně konjugované s rotací, nazýváme maximální oblast této konjugace *Siegelovým diskem*. Bod z_0 leží ve Fatouově množině.

O tom, zda linearizace existuje, rozhodují aritmetické vlastnosti čísla α . Pokud je α „dostatečně iracionální“ (špatně aproximovatelné zlomky), linearizace je možná.

Historicky první podmínku pro existenci Siegelova disku zformuloval C. L. Siegel [22]. Týká se tzv. Diophantických čísel.

Definice 2.14 (Diophantická podmínka). Řekneme, že iracionální číslo α splňuje Diophantickou podmínku řádu β (značíme $\alpha \in \mathcal{D}_\beta$), pokud existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro všechna racionální čísla p/q platí:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{\beta+1}}.$$

Siegel dokázal, že pokud α splňuje tuto podmínku, pevný bod je linearizovatelný. Později A. D. Brjuno tuto podmínku zeslabil a našel přesnější kritérium založené na řetězových zlomcích. Necht' $\{p_n/q_n\}$ je posloupnost sblížených zlomků čísla α .

Definice 2.15 (Brjunova podmínka). Iracionální číslo α splňuje **Brjunovu podmínku**, jestliže řada

$$B(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$$

konverguje. Čísla splňující tuto vlastnost nazýváme Brjunova čísla.

Tato podmínka je klíčová pro moderní klasifikaci iracionálních bodů.

Věta 2.16 (Siegel-Brjunův teorém). *Pokud rotační číslo α splňuje Brjunovu podmínku, pak je pevný bod z_0 linearizovatelný a je středem Siegelova disku [23].*

Jean-Christophe Yoccoz později dokázal, že pro kvadratické polynomy je tato podmínka nejen postačující, ale i nutná. Pokud α Brjunovu podmínku nespĺňuje, linearizace není možná a bod se stává tzv. Cremerovým bodem.

2.2.3 Cremerovy body

V předchozích kapitolách jsme klasifikovali pevné body na základě jejich multiplikátoru $\lambda = f'(z_0)$. Zbývá vyřešit hraniční případ, kdy je pevný bod z_0 iracionálně neutrální ($|\lambda| = 1$, $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) a nelze jej v žádném okolí linearizovat.

Ačkoliv se může zdát, že jde o pouhou matematickou kuriozitu (v prostoru parametrů tvoří tyto případy množinu míry nula a jsou extrémně citlivé na perturbace), pro analýzu Juliových množin mají zásadní význam. Na rozdíl od Siegelových disků, Cremerovy body leží přímo v Juliově množině. Představují oblasti, kde selhává lokální linearizace a dynamika je plně nelineární a chaotická. Bez jejich zahrnutí by naše klasifikace dynamiky zobrazení f_p nebyla úplná, neboť právě tyto body mohou tvořit součást limitních množin, které se snažíme vizualizovat a jejichž dimenzi počítáme.

Otázka linearizace, tedy existence Schröderovy rovnice, závisí na aritmetických vlastnostech čísla α . Pokud je α velmi dobře aproximovatelné racionálními čísly (tzv. Liouvilleovo číslo), objevuje se problém malých jmenovatelů a formální mocninná řada pro konjugaci diverguje.

Definice 2.17 (Cremerův bod). Necht' z_0 je pevný bod holomorfního zobrazení f s multiplikátorem $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pokud f není v žádném okolí bodu z_0 holomorfně konjugované s rotací $z \mapsto \lambda z$, nazýváme z_0 *Cremerovým bodem*.

Na rozdíl od Siegelových disků, které představují stabilní části ve Fatouovy množiny, je dynamika v okolí Cremerových bodů chaotická.

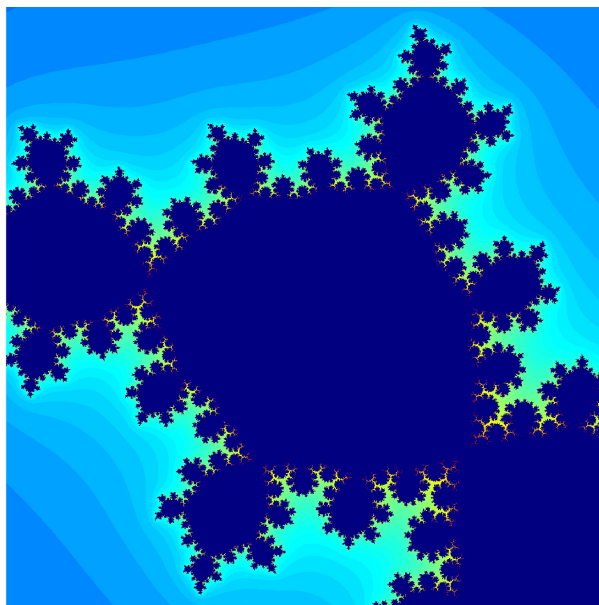
Věta 2.18 (O příslušnosti k Juliově množině). *Každý Cremerův bod leží v Juliově množině, tj. $z_{\text{Cremer}} \in J(f)$.*

Důkaz. Lze nalézt například v [1] □

Důsledek této věty je zásadní pro numerickou analýzu: protože $z_0 \in J(f)$, je tento bod (a jeho okolí) dostupný pro metodu inverzní iterace (IIM), viz v sekci 4.2, která aproximuje právě Juliovu množinu.

2.2.4 Ježci

Jelikož se v naší práci zabýváme numerickou vizualizací Juliových množin, je nezbytné správně interpretovat útvary, které metoda inverzní iterace generuje. V okolí Cremerových bodů, kde neexistuje linearizace, vytváří dynamika specifické geometrické struktury, které mohou na první pohled připomínat šum.



Útvar byl vygenerován iterací kvadratického polynomu $P(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$, kde rotační číslo $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ odpovídá zlatému řezu. Tmavá oblast uprostřed představuje stabilní Siegelův disk, na kterém je dynamika konjugovaná s iracionální rotací. Hranice tohoto disku je fraktální množina s ostny, která zasahuje hluboko do okolního prostoru.

Teorie Ricarda Pérez-Marca [26] nám však dává teoretický rámec k tomu, abychom tyto „ostny“ identifikovali jako reálné topologické vlastnosti množiny, nikoliv jako chyby výpočtu.

Věta 2.19 (O existenci ježka). *Necht' z_0 je iracionálně neutrální pevný bod zobrazení f . Pak existuje kompaktní souvislá množina $K \subset \hat{\mathbb{C}}$, nazývaná **ježek** (hedgehog), která splňuje následující vlastnosti:*

1. $z_0 \in K$,
2. K je plně invariantní, tj. $f(K) = K$,
3. dynamika $f|_K$ je topologicky ekvivalentní iracionální rotaci.

Důkaz. Lze nalézt v [26] □

Geometrie těchto množin je pro nelinearizovatelné případy velmi specifická:

Věta 2.20 (Topologické vlastnosti ježka). *Je-li z_0 Cremerův bod, pak příslušný ježek K má následující vlastnosti:*

- **Prázdný vnitřek:** $\text{int}(K) = \emptyset$. Množina je nikde hustá.

- **Lokální nesouvislost:** K není lokálně souvislá v žádném bodě $z \in K \setminus \{z_0\}$.

Tato topologická roztrhanost a absence vnitřku vede k tomu, že vizualizace těchto množin pomocí IIM by měla připomínat systém ostnů vycházejícího z centrálního bodu, což dalo těmto útvarům název. V kontextu naší práce je důležité, že tyto struktury jsou součástí Juliovy množiny a přispívají k její celkové fraktální dimenzi[26].

2.2.5 Hledání periodických cyklů

Dále se v naší práci zaměříme na detailní lokální analýzu dynamiky, konkrétně na vyhledávání periodických bodů nízkých period a určování jejich stability. Jelikož pro racionální zobrazení nelze, s výjimkou nízkých řádů a triviálních případů, nalézt periodické body analyticky, využíváme numerický algoritmický přístup, který lze rozdělit do tří fází.

1. Hledání kandidátů na periodické body

V první fázi hledáme množinu všech bodů $z \in \hat{\mathbb{C}}$, které jsou invariantní vůči n -té iteraci zobrazení f_p . Řešíme tedy rovnici:

$$f_p^{on}(z) - z = 0.$$

Protože pracujeme s racionální lomenou funkcí stupně $d = 2$, vede tento problém po převedení na společného jmenovatele na hledání kořenů polynomu stupně $2^n + 1$ (např. pro periodu 4 se jedná o polynom stupně 17). Pro řešení využíváme numerické metody hledání kořenů v komplexním oboru.

2. Identifikace periody a konstrukce orbit

Množina řešení získaná v předchozím kroku obsahuje nejen body s periodou n , ale také body s periodou k , kde k je dělitelem n , např. pevné body jsou formálně řešením rovnice pro libovolnou periodu. Abychom izolovali cykly s periodou n , aplikujeme na každý nalezený kořen z filtrační kritérium:

$$\forall k < n : |f_p^{ok}(z) - z| > \epsilon,$$

kde ϵ je zvolená tolerance pro numerickou nulu. Body, které nesplní tuto podmínku, z další analýzy vyřazujeme. Zbývající body následně seskupujeme do jednotlivých cyklů. Postupujeme tak, že vybereme bod, iterativně generujeme jeho trajektorii $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_0$ a celou tuto n -tici uložíme jako jeden objekt.

3. Výpočet násobitele a klasifikace stability

Dalším krokem analýzy je určení stability nalezených cyklů. Pro každou orbitu $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ počítáme její násobitel λ , který charakterizuje chování zobrazení v infinitesimálním okolí cyklu. Využíváme řetězového pravidla, díky kterému lze derivaci složeného zobrazení vyjádřit jako součin derivací v jednotlivých bodech orbity:

$$\lambda = (f_p^{on})'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f_p'(z_j).$$

Derivaci $f_p'(z)$ v každém bodě vyčíslujeme analyticky podle vztahu:

$$f_p'(z) = \frac{2z(1 + |p|^2)}{(1 - \bar{p}z^2)^2}.$$

Na základě velikosti vypočteného násobitele $|\lambda|$ pak cykly klasifikujeme do čtyř základních kategorií, které determinují lokální dynamiku popsaných výše.

2.3 Numerické hledání parametru p pro dané násobitele

V předchozích sekcích jsme popsali chování v okolí neutrálních pevných bodů, ať už jde o parabolické body, Siegelovy disky nebo Cremerovy body. Je důležité zdůraznit, že tyto jevy se v parametrickém prostoru zobrazení f_p nevyskytují náhodně.

Pokud zvolíme parametr p ad-hoc (např. $p = 0, 1 + 0, 1i$), s pravděpodobností blízkou 1 získáme buď atraktory, nebo repelery), jelikož množina parametrů odpovídající neutrálním bodům má v prostoru parametrů míru nula. Abychom mohli studovat například Cremerův bod s konkrétním rotačním číslem, musíme příslušný parametr p cíleně vypočítat.

Naším cílem je pro zadaný násobitel λ_{target} nalézt takový parametr $p \in \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, aby z_0 byl pevným bodem zobrazení f_p a jeho derivace v tomto bodě byla rovna λ_{target} . To vede na soustavu dvou komplexních rovnic o dvou komplexních neznámých p a z_0 :

$$f_p(z_0) - z_0 = 0, \quad (2.1)$$

$$f'_p(z_0) - \lambda_{target} = 0. \quad (2.2)$$

Po dosazení předpisu funkce $f_p(z) = \frac{z^2+p}{1-\bar{p}z^2}$ a její derivace dostáváme explicitní tvar soustavy:

$$\bar{p}z_0^3 + z_0^2 - z_0 + p = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{2z_0(1+|p|^2)}{(1-\bar{p}z_0^2)^2} - \lambda_{target} = 0. \quad (2.4)$$

Analytické řešení této soustavy je pro obecné λ obtížné kvůli provázanosti proměnné p a jejího komplexního sdružení \bar{p} . Proto úlohu řešíme numericky pomocí Newtonovy metody.

Protože standardní řešiče pracují s reálnými vektory, převedeme problém z prostoru \mathbb{C}^2 do \mathbb{R}^4 . Definujeme vektor neznámých \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = [\operatorname{Re}(p), \operatorname{Im}(p), \operatorname{Re}(z_0), \operatorname{Im}(z_0)]^T.$$

Následně definujeme vektorovou funkci $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, která reprezentuje reálné a imaginární části rovnic (2.1) a (2.2):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\bar{p}z_0^3 + z_0^2 - z_0 + p) \\ \operatorname{Im}(\bar{p}z_0^3 + z_0^2 - z_0 + p) \\ \operatorname{Re}\left(\frac{2z_0(1+|p|^2)}{(1-\bar{p}z_0^2)^2} - \lambda_{target}\right) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{2z_0(1+|p|^2)}{(1-\bar{p}z_0^2)^2} - \lambda_{target}\right) \end{bmatrix}.$$

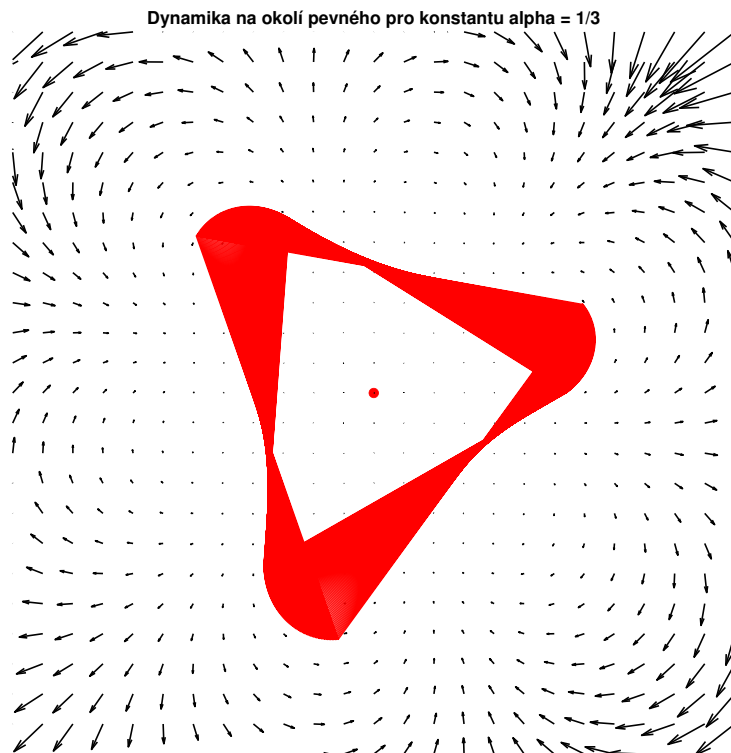
Hledáme kořen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Pro tento účel byl implementován algoritmus v prostředí MATLAB. Jako počáteční odhad \mathbf{x}_0 volíme hodnoty blízké očekávanému řešení, aby byla zajištěna konvergence.

Tento postup nám umožňuje generovat Juliovy množiny s přesně definovanými dynamickými vlastnostmi, což je nezbytné pro studium hraničních jevů, jako jsou Cremerovy body nebo Siegelovy disky se specifickým rotačním číslem α .

Pomocí tohoto algoritmu jsme pro danou konstantu $\alpha = 1/3$ našli aproximaci parametru:

$$p = 0, 3347568430 + 0, 1385354998i \text{ a pevný bod } z_0 = 0, 2672043064 + 0, 3437919566i.$$

Na jeho okolí můžeme pozorovat dynamiku, kde vidíme jednotlivé lístky Leau-Fatouovy květiny a vektorově jsem znázornil, ve kterém směru iterace utíkají od pevného bodu, nebo do něj směřují.



Vyzkoušejme dále tento algoritmus pro nalezení parametru p pro exponent, kde za konstantu α dosadíme Liouvilleovu konstantu:

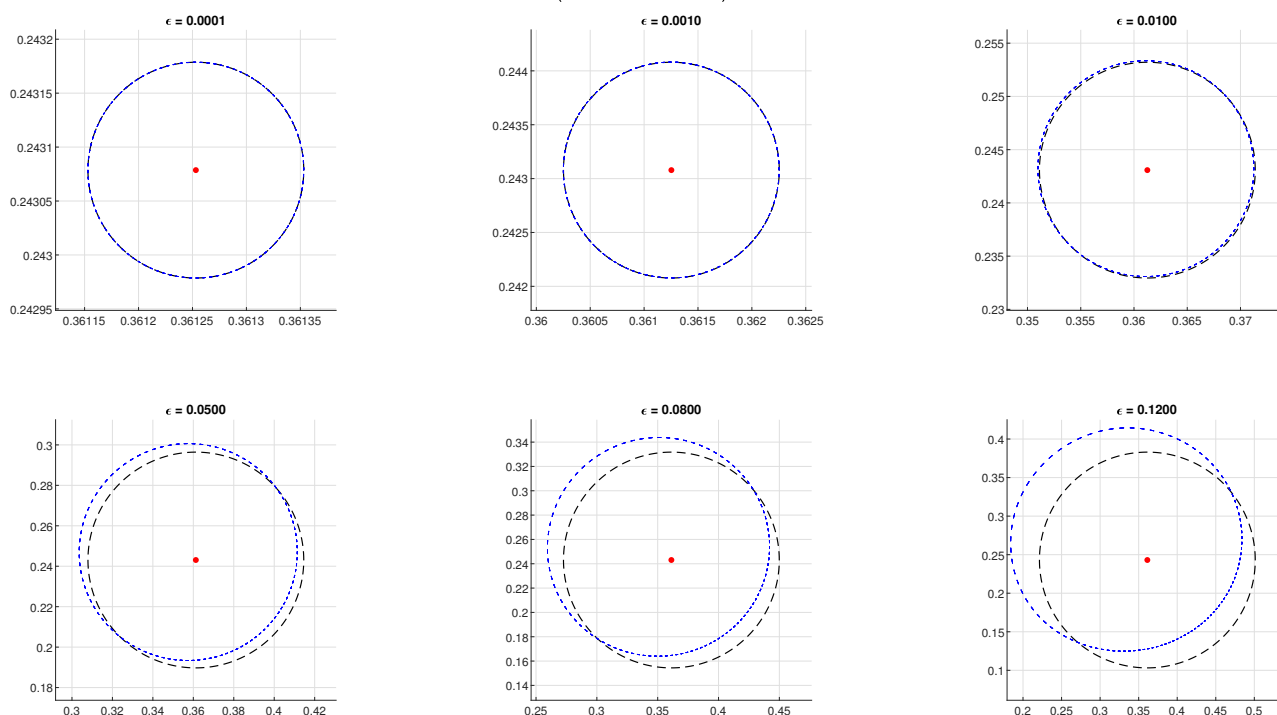
$$\alpha = L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000001 \dots$$

Tento případ by měl odpovídat Cremerovu pevnému bodu. Algoritmus nám dává výsledek:

$$p = 0,291266670745 + 0,043187433442i \text{ s pevným bodem } z = 0,361253129564 + 0,243078643912i.$$

Avšak při následné kontrole vizualizací na okolí pevného bodu zjistíme, že žádný ježek nevzniká a iterace se nechovají nikterak chaoticky.

Ověření dynamiky pro $\alpha \approx 0.110001$
(Transientní kružnice)



Parametr ϵ představuje vzdálenost počátečního bodu orbity od pevného bodu z_0 . Tento výsledek je zapříčiněn tím, že při implementaci Liouvilleovy konstanty narážíme na omezení standardní aritmetiky s plovoucí řádovou čárkou (IEEE 754). Již čtvrtý člen řady $10^{-4!} = 10^{-24}$ je menší než strojové epsilon ($\approx 2,2 \cdot 10^{-16}$), a proto se v numerických simulacích Liouvilleovo číslo L chová jako racionální číslo 0,110001, což je zřejmě až příliš velká aproximace pro naše účely. Závěrem tedy můžeme říct, že situace, kdy se tyto body vyskytují v Julioých množinách nastat sice může, ale nelze jí na běžném počítači dosáhnout.

Uvedený numerický postup lze přirozeným způsobem rozšířit i na hledání parametrů odpovídajících cyklům vyšší periody $k > 1$. V takovém případě nehledáme pevný bod samotného zobrazení f_p , ale pevný bod jeho k -té iterace f_p^k . Soustava rovnic pro Newtonovu metodu se modifikuje následovně:

$$f_p^k(z_0) - z_0 = 0, \quad (2.5)$$

$$(f_p^k)'(z_0) - \lambda_{target} = 0. \quad (2.6)$$

Hodnotu derivace složeného zobrazení $(f_p^k)'(z_0)$ vyčíslíme pomocí řetězkového pravidla jako součin derivací v jednotlivých bodech orbity:

$$(f_p^k)'(z_0) = \prod_{j=0}^{k-1} f_p'(z_j), \quad \text{kde } z_{j+1} = f_p(z_j).$$

Je však nutné poznamenat, že s rostoucí periodou k exponenciálně narůstá složitost výrazů, což klade vyšší nároky na přesnost počátečního odhadu \mathbf{x}_0 pro konvergenci řešiče.

2.4 Globální vlastnosti a kritické body

Pro praktickou analýzu Juliovy množiny je nejdůležitější vztah mezi pevným bodem a globálním tvarem množiny. Zde se opíráme o dvě klíčová tvrzení.

Prvním z nich je vztah Juliovy množiny k repelerům. Toto tvrzení teoreticky zdůvodňuje použití metody inverzní iterace 4.2, náhodným výběrem inverzních větví funkce $f(p) = \frac{z^2+p}{1-p^*z^2}$ statisticky aproximujeme právě tyto body.

Věta 2.21 (Hustota odpuzujících bodů). *Juliova množina $J(f)$ je identická s uzávěrem množiny všech odpuzujících periodických bodů zobrazení f .*

Druhým, a pro klasifikaci stability důležitým tvrzením, je vztah mezi atraktory a kritickými body.

Věta 2.22 (Fatouova věta o kritických bodech). *Každá bezprostřední oblast přitažlivosti atraktivního nebo parabolického cyklu obsahuje alespoň jeden kritický bod zobrazení f .*

Důkaz. Obě tvrzení lze nalézt v [1], nebo [13]. □

Pro naše zobrazení $f_p(z)$, které má dva kritické body (zpravidla 0 a ∞), to znamená, že nemusíme prohledávat celou komplexní rovinu. Stačí iterovat pouze tyto dva kritické body:

- Pokud orbita kritického bodu konverguje k pevnému bodu nebo cyklu, je tento cyklus stabilní a $J(f)$ je souvislá (nebo má souvislé komponenty).
- Pokud orbita kritického bodu je chaotická nebo narazí na odpuzující cyklus, stabilní atraktor neexistuje (nebo je velmi specifický, např. Cremerův bod) a f_p je v dané oblasti parametrů pravděpodobně hyperbolické na $J(f)$.

Zajímavou globální vazbu mezi všemi pevnými body zobrazení poskytuje Holomorfní indexový vzorec [1].

Věta 2.23 (Holomorfní indexový vzorec). *Pro racionální zobrazení f stupně d a jeho pevné body z_i (pro které $f'(z_i) \neq 1$) platí:*

$$\sum_i \frac{1}{1 - f'(z_i)} = 1,$$

kde sčítáme přes všechny pevné body v $\hat{\mathbb{C}}$.

Tento vzorec ukazuje, že multiplikátory nejsou nezávislé změna stability jednoho bodu (např. bifurkace z atraktivního na odpuzující) musí být globálně kompenzována změnami u ostatních pevných bodů.

2.4.1 Kritické body

Abychom mohli globálně charakterizovat dynamiku zobrazení f , nestačí zkoumat pouze pevné body. Zásadní roli hrají tzv. kritické body, tedy body, kde je derivace zobrazení nulová.

Definice 2.24 (Kritický bod). Bod $c \in \hat{\mathbb{C}}$ nazýváme kritickým bodem racionálního zobrazení f , jestliže platí:

$$f'(c) = 0.$$

Množinu všech kritických bodů zobrazení f značíme $Crit(f)$.

Pro analýzu dynamiky je rozhodující chování těchto bodů při iteraci. Definujeme post-kritickou množinu $P(f)$ jako uzávěr sjednocení všech budoucích iterací kritických bodů:

$$P(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f^{o n}(\text{Crit}(f))}.$$

Chování kritických bodů nám umožňuje rozdělit zobrazení na stabilní (hyperbolická) a nestabilní.

Definice 2.25. Racionální zobrazení f se nazývá hyperbolické, jestliže post-kritická množina $P(f)$ je disjunktní s Juliovou množinou $J(f)$, tedy:

$$P(f) \cap J(f) = \emptyset.$$

Poznámka 2.26. Tato abstraktní topologická definice má velmi praktický důsledek, který je často uváděn jako ekvivalentní charakterizace: Zobrazení f je hyperbolické právě tehdy, když každý kritický bod konverguje k nějakému atraktivnímu cyklu.

2.4.2 Geometrie Blaschkeho produktů a kvazi-kružnice

Zatímco Definice 1.25 popisuje hyperbolicitu topologicky (pomocí kritických bodů), pro naše konkrétní zobrazení f_p (odvozené v sekci 1.2) můžeme využít silnějších geometrických nástrojů. Funkce f_p je totiž speciálním případem tzv. **konečného Blaschkeho produktu**.

Definice 2.27 (Konečný Blaschkeho produkt). Zobrazení $B : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se nazývá konečný Blaschkeho produkt stupně $d \geq 1$, jestliže má tvar:

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^d \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z},$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$ je reálná fáze a body $a_k \in \mathbb{D}$ (pro $k = 1, \dots, d$) jsou nulové body zobrazení ležící uvnitř jednotkového kruhu.

Tato vlastnost má dva zásadní důsledky, které přímo souvisí s následným studiem fraktální dimenze v Kapitole 2:

Uvnitř jednotkového kruhu se dynamika řídí Schwarz-Pickovým lemmatem [1].

Lemma 2.28 (Schwarz-Pickovo lemma). *Necht' $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ je holomorfní zobrazení jednotkového disku do sebe. Pak pro libovolné dva body $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ platí, že zobrazení nezvětšuje jejich hyperbolickou vzdálenost:*

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2).$$

Rovnost nastává právě tehdy, když je f konformní automorfismus disku (Möbiova transformace). Dále pro derivaci v libovolném bodě $z \in \mathbb{D}$ platí tzv. infinitezimální tvar lemmatu:

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Pro námi studované zobrazení f_p stupně 2 platí, že pokud $|p| < 1$, není automorfismem (není prosté). Podle Schwarz-Pickova lemmatu je tedy na \mathbb{D} striktně kontrahující. To implikuje, že pokud existuje uvnitř disku pevný bod, musí být nutně atraktivní (nebo superatraktivní). Veškerá složitá dynamika, která není pouhou konvergencí k tomuto bodu, je tak vytlačena na hranici, neboli na Juliovu množinu

Definice 2.29 (Poincarého hyperbolická metrika). Na jednotkovém disku $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ zavádíme hyperbolickou metriku, jejíž element délky ds je definován vztahem:

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Tato metrika je invariantní vůči Möbiovim transformacím zachovávajícím jednotkový kruh (automorfismům disku).

Pokud je zobrazení f_p hyperbolické, jeho Juliova množina $J(f_p)$ má podle Falconera [10] strukturu **kvazi-kružnice**.

Definice 2.30 (Kvazi-kružnice). Jordanova křivka $J \subset \mathbb{C}$ se nazývá kvazi-kružnice, jestliže existuje konstanta $K \geq 1$ taková, že pro každé dva body $z_1, z_2 \in J$ platí:

$$\min(\text{diam}(J_1), \text{diam}(J_2)) \leq K|z_1 - z_2|,$$

kde J_1, J_2 jsou dva oblouky, na které body z_1, z_2 křivku J rozdělují.

To znamená, že je sice topologicky ekvivalentní kružnici (je to uzavřená smyčka), ale je v každém bodě tak zkrabacená, že její Hausdorffova dimenze \dim_H je ostře větší než 1:

$$1 < D < 2.$$

Právě tuto míru zkrabacení budeme numericky zkoumat v následující kapitole.

Předtím se ještě podívejme jak bychom numericky ověřili, jestli je množina pro dané p hyperbolická. Postupujeme ve třech krocích

- Nejprve potřebujeme získat reprezentativní sadu bodů, které leží přesně na Juliově množině. K tomu využíváme metodu IIM popsanou v kapitole 4.2.
- Jakmile máme množinu takto aproximovanou, provedeme v každém bodě výpočet derivace zobrazení. Právě velikost derivace $|f'(z)|$ je tou rozhodující veličinou, která nám v každém bodě přesně kvantifikuje lokální expanzi.
- Nakonec nalezneme minimum ze všech těchto vypočtených hodnot. Hledáme tedy bod, kde je derivace nejmenší. Pokud i v tomto nejhorším případě platí, že je velikost derivace ostře větší než jedna, algoritmus vyhodnotí systém jako hyperbolický.

Kapitola 3

Dimenze Juliových množin

Pro rigorózní matematický popis a klasifikaci Juliových množin zkoumané v této práci, nestačí klasické pojmy jako délka, plocha či objem. Tyto tradiční míry selhávají, protože fraktální objekty vykazují detaily na libovolně malé škále.

Ještě před zavedením Hausdorffovy dimenze je vhodné stručně zmínit topologickou dimenzi. Pro Juliovu množinu $J(f_p)$ studovaných racionálních zobrazení, které jsou kompaktními podmnožinami Riemannovy sféry, nabývá topologická dimenze pouze celočíselných hodnot. V závislosti na parametru p mohou nastat dva základní topologické scénáře:

- Nesouvislá množina: Pokud je $J(f_p)$ tzv. Cantorova typu (zcela nesouvislá množina), je její topologická dimenze $\dim_T(J) = 0$.
- Souvislá množina: Pokud je $J(f_p)$ souvislá nebo obsahuje souvislé komponenty, je její topologická dimenze $\dim_T(J) = 1$.

Tato celočíselná klasifikace sice rozlišuje mezi souvislým a nesouvislým případem, avšak je příliš hrubá na to, aby postihla detailní strukturu a nepravidelnost zkoumaných množin. Topologická dimenze tedy nedokáže plně popsat skutečnou geometrickou složitost, kterou tyto fraktální objekty vykazují.

Klíčovým nástrojem pro kvantifikaci této složitosti je Hausdorffova dimenze (\dim_H). Její význam podtrhuje fakt, že samotná definice fraktálu, jak ji zavedl Benoit Mandelbrot, je na ní přímo založena: **Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než její topologická dimenze.** Zatímco topologická dimenze je vždy celé číslo (0 pro bod, 1 pro křivku), Hausdorffova dimenze může nabývat neceločíselných hodnot, což přesně vystihuje míru složitosti daného objektu.

3.1 Konstrukce Hausdorffovy dimenze

Abychom mohli definovat dimenzi, musíme nejprve zavést způsob, jak měřit velikost množiny v prostoru obecné dimenze $s \geq 0$.

Definice 3.1. Necht' F je podmnožina metrického prostoru. Pro libovolné reálné číslo $s \geq 0$ a měřítko $\delta > 0$ uvažujme všechna možná spočetná pokrytí množiny F množinami $\{U_i\}$, jejichž průměr nepřesahuje δ (tj. $\text{diam}(U_i) < \delta$). s -rozměrná Hausdorffova míra $\mathcal{H}^s(F)$ je definována jako limita:

$$\mathcal{H}^s(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s \right\}$$

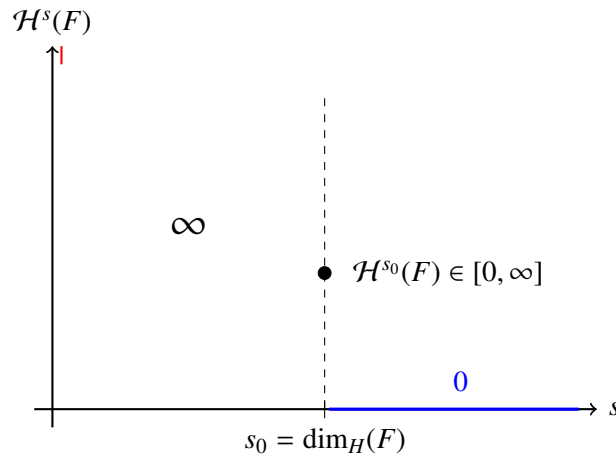
Tato definice zajišťuje, že při měření zohledňujeme tu nejefektivnější možnou cestu, jak množinu pokrýt, a zkoumáme ji při nekonečném zjemňování měřítko.

Hausdorffova dimenze je založena na kritickém chování výše uvedené míry $\mathcal{H}^s(F)$ v závislosti na parametru s . Pro danou množinu F existuje unikátní hodnota s , v níž se hodnota míry přeskočí z nekonečna na nulu.

Definice 3.2 (Hausdorffova dimenze). **Hausdorffova dimenze** $\dim_H(F)$ je definována jako hodnota:

$$\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Poznámka 3.3. Chování Hausdorffovy míry $\mathcal{H}^s(F)$ v závislosti na parametru s je schematicky znázorněno na Obrázku 3.1. Závislost je následující: pro všechna $s < \dim_H(F)$ je hodnota míry nekonečná, zatímco pro $s > \dim_H(F)$ klesá skokově na nulu. Samotná hodnota míry přesně v bodě dimenze s_0 může nabývat libovolné hodnoty nula, konečné kladné číslo, nebo nekonečno, což je pro definici dimenze nepodstatné. Klíčová je poloha tohoto „skoku“.



Obrázek 3.1: Závislost Hausdorffovy míry $\mathcal{H}^s(F)$ na parametru s . Hodnota dimenze s_0 je kritickým bodem, kde funkce přechází z nekonečna do nuly.

Ačkoliv je tato definice matematicky nejpřesnější a nejuniverzálnější, pro praktické aplikace naráží na zásadní překážku. Výpočet infima přes *všchna možná* pokrytí je pro obecné množiny zejména ty generované numericky, jako jsou atraktory dynamických systémů výpočetně nerealizovatelný.

Výpočet Hausdorffovy dimenze obecně obtížný, existuje však třída množin, pro kterou lze určit její hodnotu přesně a analyticky. Jedná se o množiny generované systémy iterovaných funkcí (IFS), které splňují podmínku otevřené množiny (viz Kapitola 4). Pro tyto striktně soběpodobné fraktály, složené z N kopií sebe sama zmenšených v poměru r , se Hausdorffova dimenze shoduje s tzv. *dimenzí podobnosti* a je dána vztahem:

$$D = \frac{\log N}{-\log r}.$$

Pro detailní studium topologických vlastností těchto množin a rigorózní důkazy vztahů mezi těmito dimenzemi odkazujeme na monografii[27].

Typickými představiteli, u kterých známe přesnou hodnotu dimenze, jsou:

- **Cantorovo diskontinuum:**

Konstrukce začíná jednotkovou úsečkou $[0, 1]$. V prvním kroku odstraníme prostřední otevřený interval $(1/3, 2/3)$. Zbudou nám dvě úsečky, každá o délce jedné třetiny původní délky ($r = 1/3$).

Tento proces se rekurzivně opakuje pro každou zbylou část do nekonečna. Výsledná dimenze je

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309.$$

- **Sierpiňského trojúhelník:**

Jako iniciátor slouží plný rovnostranný trojúhelník. V každé iteraci spojíme středy stran a odstraníme vzniklý centrální trojúhelník. Původní útvar je tak nahrazen třemi kopiemi, které mají poloviční délku strany ($r = 1/2$). Tento postup opakujeme pro nově vzniklé trojúhelníky do nekonečna. Jeho dimenze je

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,5850.$$

- **Kochova vložka (resp. křivka):**

Křivka vzniká nad úsečkou, kterou rozdělíme na tři stejné díly. Prostřední díl následně odstraníme a nahradíme jej dvěma stranami rovnostranného trojúhelníku (stříškou). Původní úsečka je tak nahrazena 4 úsečkami, přičemž každá má třetinovou délku ($r = 1/3$). Tento postup opakujeme pro nově vzniklou úsečku do nekonečna. Dimenze je tedy

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2619.$$

Oproti těmto geometrickým konstrukcím je situace u Juliovyh množin J_c generovaných kvadratickým zobrazením $f_c(z) = z^2 + c$ výrazně složitější. Tyto množiny nejsou striktně soběpodobné v geometrickém smyslu a jednoduchý analytický vzorec pro jejich dimenzi neexistuje.

Přesnou hodnotu Hausdorffovy dimenze J_c známe pouze pro triviální případy, například pro $c = 0$, kdy je Juliovou množinou kružnice ($\dim_H = 1$), nebo pro $c = -2$, kdy je to úsečka ($\dim_H = 1$). Pro obecné parametry c se musíme spoléhat na odhady a numerické simulace. Významným teoretickým výsledkem však je zjištění, že $\dim_H = 2$ pro Juliovy množiny pro parametry c ležící na hranici Mandelbrotovy množiny, více naleznete v [24].

V praxi využíváme aproximační metody, které nahrazují složité hledání optimálního pokrytí jednoduššími algoritmy, například pokrytím fixní mřížkou. Následující sekce se proto věnuje metodám box-counting, korelační dimenzi a spektru Rényiho dimenzí, které nám umožňují Hausdorffovu dimenzi efektivně odhadnout z naměřených dat.

3.2 Numerické odhady dimenze

Otázkou je jaké vlastnosti by měla dimenze splňovat. Bylo by vhodné, aby splňovala stejné vlastnosti jako má Hausdorffova dimenze. Tedy:

Monotonicita: Pokud $E \subset F$, pak

$$\dim_H E \leq \dim_H F.$$

Stabilita:

$$\dim_H(E \cup F) = \max(\dim_H E, \dim_H F).$$

Spočetná stabilita:

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H F_i.$$

Geometrická invariance:

$$\dim_H f(F) = \dim_H F,$$

pokud je f transformace prostoru \mathbb{R}^n , například posunutí, rotace, podobnost nebo afinita.

Lipschitzovská invariance:

$$\dim_H f(F) = \dim_H F,$$

pokud je f Lipschitzovská transformace.

Spočetné množiny:

$$\dim_H F = 0,$$

pokud je F konečná nebo spočetná množina.

Otevřené množiny: Pokud je F otevřená podmnožina \mathbb{R}^n , pak

$$\dim_H F = n.$$

Hladké variety: Pokud je F hladká m -rozměrná varieta (například křivka nebo plocha), pak

$$\dim_H F = m.$$

Všechny definice dimenze jsou monotónní, většina z nich je stabilní, ale některé běžné definice nesplňují spočetnou stabilitu a mohou přiřazovat spočetným množinám kladnou dimenzi. Všechny obvyklé dimenze jsou Lipschitzovsky invariantní, a tedy i geometricky invariantní.

Vlastnosti otevřených množin a hladkých variet zajišťují, že definice dimenze je rozšířením klasické definice. Je třeba poznamenat, že různé definice dimenze mohou poskytovat odlišné informace o tom, které množiny jsou Lipschitzovsky ekvivalentní.

Základním prvkem většiny definic dimenze je myšlenka měření v měřítku δ . Pro každé δ měříme množinu takovým způsobem, který ignoruje nepravidelnosti menší než δ , a sledujeme, jak se tato měření chovají, když $\delta \rightarrow 0$.

Například, pokud F je rovinná křivka, naše měření $M_\delta(F)$ může představovat počet kroků, které je potřeba udělat dvojicí kružítkových ramen s roztečí δ , abychom křivku F prošli.

Dimenze množiny F je pak určena mocninovým vztahem (pokud existuje), kterým se řídí $M_\delta(F)$ při $\delta \rightarrow 0$. Pokud platí

$$M_\delta(F) \sim c \delta^{-s}.$$

Pro jisté konstanty c a s , můžeme říci, že F má tzv. dimenzi rovnu s , přičemž c lze chápat jako „ s -rozměrnou délku“ množiny F .

Vezmeme-li logaritmy, dostaneme

$$\log M_\delta(F) \sim \log c - s \log \delta,$$

ve smyslu, že rozdíl obou stran má limitu nula pro $\delta \rightarrow 0$. Odtud plyne

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Tyto vztahy jsou velmi užitečné pro výpočetní nebo experimentální účely, protože hodnotu s lze odhadnout jako záporný směrníkový koeficient grafu $\log M_\delta(F)$ proti $\log \delta$ v vhodném rozsahu δ . Samozřejmě, v reálných fyzikálních jevech můžeme pracovat pouze s konečným rozsahem δ , teorie a experiment se začínají rozcházet dříve, než dosáhneme atomárního měřítka.

3.3 Box-Counting (Mřížková) dimenze

Box-counting dimenze (v češtině také známá jako *mřížková dimenze*) patří mezi nejpoužívanější typy dimenzí. Její popularita vychází především z poměrně jednoduchého matematického výpočtu a snadného empirického odhadu.

Definice 3.4. Necht' $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená množina. Označme $N_\delta(F)$ nejmenší počet množin s průměrem nejvýše δ , které pokrývají F .

Pak dolní a horní mřížková dimenze množiny F jsou definovány jako

$$D_0 F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad \bar{D}_0 F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Pokud se obě hodnoty rovnají, jejich společná hodnota se nazývá *mřížková dimenze* a značí se

$$D_0 F.$$

Místo standardního označení \dim_{BOX} , nebo \dim_B , budeme používat D_0 , abychom byli v souladu s označením pro Rényiho dimenze, což je pouze zobecnění této dimenze.

Definice sahá nejméně do 30. let 20. století a v průběhu času byla označována různými názvy, jako například: *Kolmogorovova entropie*, *entropická dimenze*, *kapacitní dimenze* (tento termín je vhodné se vyhnout kvůli možným asociacím s potenciálovou teorií), *metrická dimenze*, *logaritmická hustota*.

Je důležité porozumět vztahu mezi box-counting dimenzí a Hausdorffovou dimenzí. Pokud lze množinu F pokrýt $N_\delta(F)$ množinami o průměru δ , pak ze vzorce v minulé kapitole platí

$$H_\delta^s(F) \approx N_\delta(F) \delta^s.$$

Jestliže

$$1 < H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F),$$

pak

$$\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$$

pro dostatečně malá δ . Z toho vyplývá

$$s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

a tedy

$$\dim_H F \leq D_0 F.$$

Obecně však zde nedostáváme rovnost. Ačkoli Hausdorffova a mřížková dimenze jsou si rovny pro mnoho „dostatečně pravidelných“ množin, existuje řada příkladů, kdy je tato nerovnost *striktní*, lze nalézt v [10].

$$N_\delta(F) \approx \delta^{-s}$$

pro malá δ , kde $s = D_0 F$. Přesněji řečeno, platí

$$N_\delta(F) \delta^s \rightarrow \infty \quad \text{pokud } s < D_0 F,$$

a

$$N_\delta(F) \delta^s \rightarrow 0 \quad \text{pokud } s > D_0 F.$$

Dále platí

$$N_\delta(F) \delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ je (konečné) } \delta\text{-pokrytí } F \right\},$$

což je třeba porovnat s

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrytí } F \right\},$$

kteřé se objevuje v definicích Hausdorffovy míry a dimenze.

Při výpočtu Hausdorffovy dimenze přiřazujeme různým pokrývajícím množinám U_i váhy $|U_i|^s$, zatímco pro mřížkovou dimenzi používáme pro každou pokrývající množinu stejnou váhu δ^s .

Mřížková dimenze tedy může být chápána jako míra efektivity, s jakou lze množinu pokrýt malými množinami stejné velikosti, zatímco Hausdorffova dimenze pracuje s pokrytími pomocí množin malých, ale případně velmi různorodých velikostí.

Věta 3.5. *Necht' $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina a množiny pro pokrytí F jsou definovány jako mřížka takto:*

$$\langle m_1\delta, (m_1 + 1)\delta \rangle \times \cdots \times \langle m_n\delta, (m_n + 1)\delta \rangle,$$

kde m_1, \dots, m_n jsou celá čísla a δ je krok mřížky. $N_\delta^*(F)$ je počet krychlí, které protínají množinu F . Pak mřížkové dimenze počítané pomocí $N_\delta^*(F)$ a $N_\delta(F)$ z definice 11 jsou si rovny.

Důkaz. Důkaz spočívá v nalezení nerovností, které sevrou hodnotu $N_\delta^*(F)$ z obou stran pomocí $N_\delta(F)$.

- Dolní odhad: Krychle z mřížky mají hranu délky δ . V n -rozměrném prostoru je průměr takové krychle roven $\delta \sqrt{n}$ (úhlopříčka). Tyto krychle tvoří pokrytí množiny F . Protože $N_{\delta \sqrt{n}}(F)$ je definováno jako nejmenší počet množin o průměru $\delta \sqrt{n}$ nutných k pokrytí, musí platit:

$$N_{\delta \sqrt{n}}(F) \leq N_\delta^*(F).$$

Když tuto nerovnost zlogaritmuje a vydělíme $-\log(\delta \sqrt{n})$, dostaneme pro limitu $\delta \rightarrow 0$:

$$D_0 F \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(F)}{-\log \delta}.$$

- Horní odhad: Nyní uvažujme libovolnou množinu z optimálního pokrytí, která má průměr δ . Tato množina může protnout jen omezený počet krychlí naší mřížky o hraně δ . V \mathbb{R}^n je tento počet maximálně 3^n (například ve 2D čtverec o straně δ zasáhne maximálně do 9 okolních čtverců mřížky, pokud leží na jejich průniku). Proto počet mřížkových krychlí nemůže být větší než 3^n -násobek optimálního počtu množin:

$$N_\delta^*(F) \leq 3^n N_\delta(F).$$

Zlogaritmováním dostaneme:

$$\log N_\delta^*(F) \leq \log 3^n + \log N_\delta(F).$$

Při dělení výrazem $-\log \delta$ člen $\frac{\log 3^n}{-\log \delta}$ konverguje k nule a zmizí. Zůstane opačná nerovnost:

$$D_0 F \geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(F)}{-\log \delta}.$$

Z platnosti obou nerovností plyne, že limity se rovnají a definice jsou ekvivalentní.

□

Věta 3.6. Horní a dolní mřížková dimenze množiny $F \subset \mathbb{R}^n$ jsou dány jako

$$\underline{D}_0 F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^{**}(F)}{-\log \delta}, \quad \overline{D}_0 F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^{**}(F)}{-\log \delta},$$

a samotná mřížková dimenze je dána jako

$$D_0 F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^{**}(F)}{-\log \delta}$$

(pokud limita existuje), kde $N_\delta^{**}(F)$ je jedno z následujících:

1. nejmenší počet uzavřených koulí s poloměrem δ , které pokrývají F ,
2. nejmenší počet krychlí se stranou δ , které pokrývají F ,
3. počet krychlí z mřížky se stranou δ , které protínají F ,
4. nejmenší počet množin s průměrem maximálně δ , které pokrývají F ,
5. největší počet disjunktních koulí s poloměrem δ , které mají střed v F .

Z uvedené ekvivalence plyne, že hodnota mřížkové dimenze nezávisí na volbě tvaru pokrývacích množin. Díky tomu se v numerických aplikacích standardně využívá výpočetně nejefektivnější přístup, tedy pokrytí pomocí pravidelné čtvercové sítě.

Věta 3.7. Necht' $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Pak platí

$$\dim_H F \leq \underline{D}_0 F \leq \overline{D}_0 F.$$

Důkaz. Předpokládejme, že máme pokrytí množiny F pomocí $N_\delta(F)$ množin, které mají průměr maximálně δ . Z definice Hausdorffovy míry $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ plyne:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

Pokud zvolíme s menší než je Hausdorffova dimenze, nebo přesněji, pokud předpokládáme, že Hausdorffova míra $\mathcal{H}^s(F)$ je kladná, například větší než 1, pak pro dostatečně malé δ platí:

$$1 < \mathcal{H}^s(F) \approx \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

Zlogaritmováním nerovnosti $1 < N_\delta(F) \delta^s$ dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &< \log N_\delta(F) + s \log \delta \\ -s \log \delta &< \log N_\delta(F). \end{aligned}$$

Vydělením kladným výrazem $-\log \delta$ (protože δ je malé, $\log \delta$ je záporný, takže $-\log \delta$ je kladné):

$$s < \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Když provedeme limitní přechod pro $\delta \rightarrow 0$, dostaneme:

$$s \leq \underline{D}_0 F.$$

Protože to platí pro libovolné s blížíící se k $\dim_H F$, musí platit:

$$\dim_H F \leq \underline{D}_0 F.$$

Závěr: Hausdorffova dimenze je vždy menší nebo rovna dolní mřížkové dimenzi. □

Věta 3.8. *Pro mřížkovou dimenzi platí:*

1. *hladká plocha F dimenze m v \mathbb{R}^n má mřížkovou dimenzi rovnu m ,*
2. *\underline{D}_0 a \overline{D}_0 jsou monotónní,*
3. *$\overline{D}_0(E \cup F) = \max\{\overline{D}_0E, \overline{D}_0F\}$; toto neplatí obecně pro \underline{D}_0 ,*
4. *\underline{D}_0 a \overline{D}_0 jsou invariantní vůči bi-lipschitzovské transformaci.*

3.3.1 Numerický výpočet mřížkové dimenze

Zatímco v teoretické části byla mřížková dimenze definována pomocí limitního přechodu $\epsilon \rightarrow 0$, v numerické praxi narážíme na omezení daná konečným počtem bodů a konečnou přesností. Výpočet dimenze se tak redukuje na statistickou analýzu dat získaných postupným pokrýváním množiny mřížkami různé jemnosti. Tato kapitola popisuje použitý algoritmus, volbu parametrů a metodu vyhodnocení výsledků.

Vstupem algoritmu je aproximace Juliovy množiny $J(f_p)$, reprezentovaná jako konečná množina bodů $S = \{p_1, p_2, \dots, p_N\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ (více viz kapitola 4.2). Algoritmus sleduje, jak se mění počet obsazených buněk mřížky v závislosti na jejím zjemňování.

Algoritmus probíhá v následujících krocích:

1. Nejprve určíme ohraničující prostor, ve kterém se množina nachází. Pro případ Riemannovy sféry je to krychle $[-1, 1]^3$. Následně zvolíme posloupnost měřítek $\{\epsilon_k\}$, která klesá geometrickou řadou (např. $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/\delta$, kde $\delta > 1$).
2. Pro každé zvolené měřítko ϵ rozdělíme prostor na mřížku buněk o hraně ϵ . Není efektivní v paměti vytvářet celou mřížku; místo toho pro každý bod $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ vypočteme celočíselné indexy buňky, do které spadá:

$$idx_x = \lfloor x_i/\epsilon \rfloor, \quad idx_y = \lfloor y_i/\epsilon \rfloor, \quad idx_z = \lfloor z_i/\epsilon \rfloor.$$

3. Množinu všech indexů projdeme a zjistíme počet unikátních trojic. Tento počet odpovídá hodnotě $N(\epsilon)$, tedy minimálnímu počtu boxů velikosti ϵ potřebných k pokrytí množiny.
4. Proces opakujeme pro všechna ϵ_k od velikosti srovnatelné s celou množinou až po velikost blízkou se průměrné vzdálenosti mezi sousedními body.
5. Získané dvojice hodnot $(\epsilon, N(\epsilon))$ vyneseme do grafu, kde na ose x je $\ln(1/\epsilon)$ a na ose y je $\ln N(\epsilon)$. Podle teoretického předpokladu $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_0}$ očekáváme lineární závislost:

$$\ln N(\epsilon) \approx D_0 \cdot \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + C.$$

Směrnice této přímky odpovídá hledané dimenzi D_0 .

V reálné numerické simulaci však data nikdy neleží na dokonalé přímce v celém rozsahu. Graf má typicky tvar písmene „S“ se dvěma limitními oblastmi: Pro velká ϵ stačí k pokrytí celé množiny jen malý počet boxů. V extrému, kdy ϵ je větší než průměr množiny, je $N(\epsilon) = 1$. V této oblasti graf stagnuje a směrnice se blíží nule. Tato data nenesou informaci o fraktální struktuře.

Pokud je ϵ příliš malé, boxy se stávají menšími než mezery mezi vygenerovanými body. Většina boxů pak obsahuje pouze jeden izolovaný bod. V této fázi počet boxů neroste s jemností mřížky, ale ustálí se na celkovém počtu vygenerovaných bodů N . Směrnice v této oblasti klesá k nule

Mezi těmito extrémami se nachází oblast, kde platí mocninný zákon. Právě v tomto intervalu musíme provést lineární regresi pro získání směrnice.

Přesnost metody je přímo úměrná počtu bodů N , které tvoří aproximaci množiny. U Juliovy množiny, jejichž dimenze je mezi 1 a 2, rostou nároky na počet bodů exponenciálně. S omezeným počtem bodů se oblast s příliš malým měřítkem posouvá doleva a zkracuje se využitelná škálovací oblast. To může vést k podhodnocení dimenze.

Standardní algoritmus využívá fixní polohu mřížky. Může se stát, že body ležící těsně u sebe spadnou do dvou sousedních boxů jen proto, že mezi nimi prochází hranice mřížky. To uměle navyšuje $N(\epsilon)$. Ačkoliv tento efekt asymptoticky pro $\epsilon \rightarrow 0$ mizí, u hrubších mřížek může způsobovat oscilace v log-log grafu. V literatuře se někdy tento problém řeší průměrováním přes více posunutí mřížky, nicméně pro dostatečně velký soubor dat je tento vliv zanedbatelný oproti chybě regrese.

Specifikem naší práce je analýza na Riemannově sféře. Použití standardního 2D Box-countingu na stereografickou projekci množiny v rovině by vnášelo systematickou chybu. Body v blízkosti „nekonečna“ (pólu projekce) jsou v rovině rozprostřeny do velkých vzdáleností, ačkoliv na sféře jsou si blízké. Proto byl implementován 3D Box-counting, který pokrývá povrch sféry krychlovými voxely. Tento přístup je invariantní vůči rotaci sféry a zajišťuje, že všechny části Juliovy množiny (včetně těch jdoucích do nekonečna) mají ve výpočtu stejnou váhu. Výsledná dimenze tak lépe reflektuje globální geometrickou složitost invariantní množiny.

Další možnosti výpočtu této dimenze spolu s modifikacemi jejího výpočtu, je popsáno například v [30], kde je výpočet aplikován na množiny od jednoduchých jako kružnice a čtverce, až po složitější, jako je Mandelbrotova množina.

3.4 Korelační dimenze

Korelační dimenze je jednou z nejběžněji používaných metod pro odhad fraktální dimenze atraktoru z experimentálních dat. Byla zavedena Grassbergerem a Procacciou v roce 1983 [33] a je založena na takzvaném korelačním integrálu.

Definice 3.9. Necht' $F = \{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^m$ je konečná množina bodů. Pak *Korelační integrál* je definován jako:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \Theta(r - \|x_i - x_j\|),$$

kde Θ je Heavisidova funkce, tj. $\Theta(u) = 1$ pro $u > 0$ a $\Theta(u) = 0$ jinak.

Tento integrál udává pravděpodobnost, že dva náhodně vybrané body z množiny F leží ve vzdálenosti menší než r .

Definice 3.10. Pro malá r platí mocninová závislost

$$C(r) \propto r^D,$$

pak exponent D se nazývá *korelační dimenze* množiny F , značíme $D_2(F)$ a je definován vztahem

$$D_2(F) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}.$$

Přímé určení dimenze z korelačního integrálu podle rovnice definice je velmi neefektivní, protože konvergence pro $r \rightarrow 0$ je logaritmičsky pomalá. Lepšího výsledku lze dosáhnout určením lokálního sklonu, definovaného jako

$$D(r) := \frac{d \log C(N, r)}{d \log r} = \frac{r}{C(N, r)} \frac{dC(N, r)}{dr}.$$

V alternativní formě lze dimenzi získat jako

$$D_2(F) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C(N, r)}{\log r}.$$

V experimentech se hodnota $D(r)$ typicky získává lineární regresí úseku grafu $\log C(N, r)$ vůči $\log r$, kde platí přibližně lineární vztah. Sklon této přímky poskytuje odhad korelační dimenze.

Druhou možností je přímku aproximovat pomocí dvou bodů na křivce:

$$v(r) = \frac{\log C(N, r_2) - \log C(N, r_1)}{\log r_2 - \log r_1}.$$

Implementace této druhé metody však vyžaduje volbu dvou měřítek délky, r_1 a r_2 . Větší z nich je omezeno velikostí atraktoru, menší je limitováno nejkratší vzájemnou vzdáleností mezi body.

Přímý rozdíl v rovnici však nevyužívá plně všech informací, které jsou obsaženy v $C(N, r)$ pro hodnoty mezi r_1 a r_2 . Pro využití všech dostupných dat lze použít metodu nejmenších čtverců k fitování směrnice, ale i tento přístup má svá úskalí.

Nevážené metody nejmenších čtverců nejsou vhodné, protože odhady $C(N, r)$ jsou obvykle mnohem přesnější pro větší r než pro menší r . Vážené metody mohou tuto nerovnoměrnost částečně kompenzovat, ale stále zůstává problém, že sousední hodnoty $C(N, r)$ nejsou nezávislé. Protože $C(N, r + \Delta r)$ se rovná $C(N, r)$ zvětšenému o zlomek vzdáleností mezi r a $r + \Delta r$, je chybou předpokládat, že $C(N, r + \Delta r)$ je na $C(N, r)$ nezávislé.

Odhad dimenze tedy závisí i na tom, jak je $C(N, r)$ vzorkováno, zda v logaritmičských intervalech ($r = 0.001, 0.01, 0.1, \dots$) nebo v rovnoměrných ($r = 0.001, 0.002, 0.003, \dots$). Navíc chyba, kterou přirozeně poskytuje metoda nejmenších čtverců, má jen malou vypovídací hodnotu o skutečné chybě odhadu dimenze.

Vzhledem k omezením metody nejmenších čtverců vyvinul Takens postup, který dokáže konzistentně zahrnout informace z celého rozsahu vzdáleností. Více v [43].

Algoritmus korelační dimenze Grassberger–Procaccia je jednoduchý na implementaci, protože vyžaduje pouze výpočet vzdáleností mezi body a určení podílu těch, které jsou menší než r . Nicméně odhad z konečných dat je zatížen řadou praktických problémů: omezenou velikostí vzorku, efekty okrajů, šumem a pomalou konvergencí.

3.5 Rényiho dimenze

V předchozích kapitolách jsme definovali základní fraktální dimenze, jako je Hausdorffova dimenze a Box-counting dimenze. Pro komplexní dynamické systémy, jakými jsou Juliovy množiny $J(f_p)$ studované v této práci, však jedna hodnota dimenze často nestačí k plnému popisu jejich struktury. Tyto množiny vykazují vlastnosti tzv. multifraktálů, kde je hustota pravděpodobnosti bodů rozložena nerovnoměrně. Pro adekvátní popis těchto struktur zavádíme v této kapitole pokročilé metody: spektrum zobecněných Rényiho dimenzí.

Zobecněné dimenze, poprvé zavedené v kontextu teorie informace Alfrédem Rényim [34] a později aplikované na chaotické atraktory Hentschelem a Procacciou [35], poskytují komplexní pohled na geometrii fraktálu. Zatímco Box-counting dimenze pouze počítá, zda je buňka mřížky obsazena, Rényiho dimenze zohledňuje i to, jak hustě je obsazena.

Definice 3.11 (Zobecněná Rényiho dimenze). Necht' F je omezená podmnožina \mathbb{R}^n pokrytá mřížkou s velikostí buňky ϵ . Necht' $p_i(\epsilon)$ označuje pravděpodobnostní míru (nebo normalizovanou četnost bodů) i -té buňky mřížky. Definujme partiční funkci $Z_q(\epsilon)$ řádu $q \in \mathbb{R}$ vztahem:

$$Z_q(\epsilon) = \sum_i (p_i(\epsilon))^q,$$

kde sčítáme přes všechny buňky s nenulovou pravděpodobností. Zobecněná Rényiho dimenze D_q je pak definována jako limita:

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log Z_q(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

pro $q \neq 1$. Pro singulární případ $q = 1$ je dimenze definována limitním přechodem $q \rightarrow 1$, což odpovídá informační dimenzi.

Poznámka 3.12. V praxi, při analýze konečného souboru N bodů, aproximujeme pravděpodobnost p_i jako $p_i \approx \frac{N_i}{N}$, kde N_i je počet bodů v i -té buňce.

Parametr q funguje jako váhový faktor, který nám umožňuje zkoumat různé části množiny:

- $q = 0$: D_0 je klasická Box-counting dimenze. Všechny neprázdné buňky mají stejnou váhu ($p_i^0 = 1$).
- $q = 2$: D_2 je korelační dimenze.
- $q \rightarrow \infty$: Dimenze D_∞ je dominována buňkami s nejvyšší hustotou bodů.
- $q \rightarrow -\infty$: Dimenze $D_{-\infty}$ je citlivá na nejřidší oblasti fraktálu.

Pro monofraktály platí $D_q = D_0$ pro všechna q . Pro multifraktály, je D_q klesající funkcí q , tj. $D_q < D_{q'}$ pro $q > q'$.

3.6 Další možnosti výpočtu

Zatímco geometrické dimenze, jako je Hausdorffova dimenze nebo spektrum Rényiho dimenzí, popisují statickou, prostorovou složitost fraktální množiny, pro pochopení chování dynamického systému je klíčové kvantifikovat, jak fraktální struktura ovlivňuje pohyblivé procesy.

Pro popis dynamických vlastností fraktálních množin, jako je šíření částic nebo pravděpodobnost návratu do počátku, zavádíme dynamické dimenze. Tyto veličiny vycházejí z modelu náhodné procházky na daném grafu fraktální množiny.

3.6.1 Dimenze náhodné procházky

Dimenze náhodné procházky (anglicky walk dimension) kvantifikuje rychlost šíření částice po fraktální množině.

Definice 3.13 (Walk dimension). Necht' $R_t = \|X_t - X_0\|$ označuje euklidovskou vzdálenost částice od jejího počátečního bodu X_0 v čase t . Walk dimenze D_w je definována pomocí asymptotického chování druhého momentu této vzdálenosti (střední kvadratické vzdálenosti) pro $t \rightarrow \infty$:

$$m_2(t) = E[R_t^2] \approx C \cdot t^{2/D_w},$$

kde $E[\cdot]$ značí střední hodnotu a $C \in \mathbb{R}^+$ je kladná konstanta.

Pro standardní difuzi v euklidovském prostoru platí $D_w = 2$, kdy střední kvadratická vzdálenost roste lineárně s časem (Brownův pohyb). U fraktálních Juliových množin částice často uvízne ve „slepých uličkách“ a musí překonávat složité větvení. To zpomaluje šíření, což vede k sub-difuzi, pro kterou platí $D_w > 2$. Numerický odhad D_w získáváme simulací náhodné procházky na diskretizované množině a následnou lineární regresí v logaritmickeém grafu, kde směrnice dává exponent. Vyšší hodnota D_w přímo koreluje s vyšší mírou neprůchodnosti a složitosti fraktální sítě.

3.6.2 Spektrální dimenze (D_s)

Spektrální dimenze se definuje v kontextu náhodné procházky (difuze) po fraktálním objektu. Využívá se model asymptotické pravděpodobnosti návratu částice do počátečního bodu $p_{0,t}$ v čase t .

Definice 3.14 (Spektrální dimenze). Spektrální dimenze D_s je definována asymptotickým chováním pravděpodobnosti $p_{0,t}$, že se náhodná procházka v čase t vrátí zpět do svého výchozího bodu:

$$p_{0,t} = \text{prob}(R_t = 0) \approx A \cdot t^{-D_s/2},$$

kde R_t je euklidovská vzdálenost částice od počátku v čase t a $A \in \mathbb{R}^+$ je konstanta

Tato definice odráží omezenou konektivitu fraktální struktury. Pro praktický odhad spektrální dimenze se tento vztah často linearizuje pomocí logaritmické transformace:

$$\ln p_{0,t} \approx \ln A - \frac{D_s}{2} \ln t.$$

Tento linearizovaný model je pak základem pro numerické odhady, například pomocí metody nejmenších čtverců.

Zatímco pro d -rozměrný euklidovský prostor platí $D_s = 2$, pro fraktály je obvykle $D_s < 2$. Hodnota $D_s < 2$ indikuje, že částice je "uvězněna" v lokálním okolí startu, protože snížená spojitost fraktální sítě způsobuje, že se šíří efektivně pomaleji. To vede k vyšší pravděpodobnosti návratu než ve volném prostoru. Spektrální dimenze je tak citlivá na poměr objemu a spojitosti fraktálu.

3.6.3 Propojení dimenzí: Alexander-Orbachova domněnka

Mezi dynamickými dimenzemi (D_w, D_s) a fraktální dimenzí existuje významný vztah, v literatuře známý jako Alexander-Orbachova domněnka:

$$D_s \approx \frac{2 \dim_H}{D_w}.$$

Je důležité poznamenat, že tato rovnost **není univerzálně platná** pro všechny typy fraktálních množin. Její platnost byla rigorózně dokázána pro specifické třídy fraktálů (např. stromy a některé finitně větvené fraktály), zatímco u jiných struktur mohou nastat odchylky.

I přes toto omezení nám tento vztah v rámci numerické analýzy poskytuje cennou možnost nezávislého ověření výsledků. Umožňuje nám porovnat, zda \dim_H aproximována například metodou Box-counting koresponduje s dynamickými exponenty (D_w, D_s) získanými ze simulace náhodné procházky. Shoda naměřených hodnot by pak s tímto vztahem tak zvyšuje důvěryhodnost našich numerických odhadů, zatímco výrazné odchylky mohou poukazovat na specifické topologické vlastnosti zkoumané Juliovy množiny, pro které tato aproximace selhává.

3.6.4 Výpočet dynamických dimenzí

Před samotným měřením nagenerujeme data pomocí IIM algoritmu popsaném v kapitole 4.2. Algoritmus nejprve vygeneruje množinu bodů a promítne ji na Riemannovu sféru, aby se eliminovaly okrajové efekty neomezených množin. Nad těmito body je následně sestaven graf sousednosti pomocí metody k -nejbližších sousedů, kde $k = 6$. Tím vzniká síť, která definuje možné cesty pro náhodné chodce.

Výpočet dimenze náhodné procházky D_w :

Výpočet dimenze náhodné procházky se zaměřuje na rychlost, s jakou se částice vzdalují od počátku. Algoritmus simuluje pohyb souboru nezávislých chodců, kteří v každém kroku přejdou do náhodně vybraného sousedního uzlu. V každém časovém kroku t se pro každého chodce vypočítá eukleidovská vzdálenost od jeho startovního bodu. Zprůměrováním druhých mocnin těchto vzdáleností přes všechny chodce získáme střední kvadratickou výchylku:

$$\text{MSD}(t) = \langle |X_t - X_0|^2 \rangle.$$

Teoretický model předpokládá vztah $\text{MSD}(t) \sim t^{2/D_w}$. Pro získání exponentu se data transformují do logaritmických souřadnic $\ln t$ vs. $\ln \text{MSD}$. Na transformovaných datech je provedena lineární regrese. Klíčové je, že fitování probíhá pouze na krátkém časovém úseku. Tento limit je nutný, protože na prostorově omezené množině dochází pro velké časy k saturaci – chodci narazí na konec množiny a MSD přestane růst. Směrnice přímk α pak určuje dimenzi vztahem $D_w = 2/\alpha$.

Výpočet Spektrální dimenze D_s : Zatímco D_w měří expanzi, spektrální dimenze se počítá analýzou návratů náhodné procházky. Simulace probíhá na stejném grafu, ale sleduje se jiná statistická veličina. V každém časovém kroku algoritmus kontroluje, zda se aktuální index vrcholu chodce shoduje s indexem jeho startovního vrcholu. Podíl chodců, kteří se v čase t nacházejí zpět v počátku, definuje pravděpodobnost návratu $P_{0,t}$. Vycházíme z asymptotického vztahu:

$$P_{0,t} \sim t^{-D_s/2}.$$

Data jsou opět vynesena v logaritmickém grafu $\ln t$ vs. $\ln P_{0,t}$, kde očekáváme klesající lineární závislost. Lineární regresí se proloží data v definovaném intervalu. Získaná směrnice β slouží k výpočtu spektrální dimenze podle vzorce $D_s = -2 \cdot \beta$. Tato metoda je méně citlivá na okrajové podmínky sféry než MSD, proto lze pro fitování použít i delší časový úsek. Měřením těchto dimenzí pro reálné případy se zabývá například práce [44].

3.7 Bowenova dimenze

Zatímco geometrické metody jako Box-counting zkoumají množinu jako statický objekt, Bowenova metoda využívá informaci o dynamice zobrazení. Vychází z myšlenky, že fraktální dimenze hyperbolické Juliovy množiny je přímo svázána s tím, jak zobrazení v průměru roztahuje prostor.

Tento přístup, známý jako termodynamický formalismus, zavedl Rufus Bowen v [37]. Klíčovou veličinou zde není počet boxů, ale tzv. *tlaková funkce*, která sčítá vážené příspěvky derivací na orbitách.

Definice 3.15 (Topologický tlak). Necht' $f : J(f) \rightarrow J(f)$ je hyperbolické racionální zobrazení. Pro reálný parametr $t \in \mathbb{R}$ definujeme tlakovou funkci $P(t)$ jako limitu:

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n(t),$$

kde $Z_n(t)$ je tzv. partiční suma přes n -té vzory libovolného bodu $z_0 \in J(f)$:

$$Z_n(t) = \sum_{w \in f^{-n}(z_0)} |(f^n)'(w)|^{-t}.$$

V této sumě sčítáme přes všechny větve inverzního zobrazení hloubky n . Výraz $|(f^n)'(w)|^{-t}$ funguje jako váha: čím více zobrazení v bodě w expanduje (má větší derivaci), tím menší je jeho příspěvek do součtu. Parametr t zde hraje roli testovacího exponentu. Chování funkce $P(t)$ je monotónně klesající. Pro malá t suma diverguje (tlak je kladný), pro velká t suma rychle konverguje k nule (tlak je záporný).

Zásadní výsledek, který spojuje tento dynamický tlak s geometrií množiny, formuluje následující věta.

Věta 3.16 (Bowenův vzorec). Necht' f je hyperbolické racionální zobrazení. Potom Hausdorffova dimenze \dim_H jeho Juliovy množiny $J(f)$ je jediným reálným řešením rovnice:

$$P(\dim_H) = 0.$$

Princip důkazu: Celý důkaz je poměrně dost technický a využívá pokročilé metody variačního počtu a teorie míry, na který nemáme prostor, více lze nalézt například v [38]. Myšlenka stojí na nalezení speciální pravděpodobnostní míry, která vidí fraktální strukturu množiny nejlépe. Důkaz lze rozdělit do tří kroků:

1. Uvažujme potenciál $\phi_t(z) = -t \log |f'(z)|$. Podle Variačního principu platí pro topologický tlak $P(t)$ vztah:

$$P(t) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \left(h_\mu(f) - t \int \log |f'| d\mu \right),$$

kde \mathcal{M}_f je prostor všech f -invariantních pravděpodobnostních měr a $h_\mu(f)$ je metrická entropie. Výraz $\chi_\mu = \int \log |f'| d\mu$ představuje Lyapunovův exponent míry μ . Rovnici lze tedy přepsat jako hledání rovnováhy:

$$P(t) = \sup_{\mu} (h_\mu(f) - t\chi_\mu).$$

2. Jelikož je zobrazení f na Juliově množině $J(f)$ expanzivní, autoři dokazují, že pro každé t existuje unikátní míra μ_t (nazvaná Gibbsova míra nebo rovnovážný stav), která toto supremum realizuje. Tedy:

$$P(t) = h_{\mu_t}(f) - t\chi_{\mu_t}.$$

Tato míra má klíčovou geometrickou vlastnost (Gibbs property). Pro malou kouli $B(x, r)$ o poloměru r platí odhad její míry:

$$\mu_t(B(x, r)) \approx r^t \cdot e^{-nP(t)},$$

kde n souvisí s časem návratu do okolí bodu.

3. Nyní hledáme takové t_0 , pro které je $P(t_0) = 0$. Pokud $P(t_0) = 0$, pak exponenciální člen v odhadu míry zmizí ($e^0 = 1$) a dostáváme vztah:

$$\mu_{t_0}(B(x, r)) \approx r^{t_0}.$$

Tento vztah říká, že míra μ_{t_0} škáluje přesně jako r^{d_0} . Z Mass Distribution Principle v geometrické teorii míry plyne: Pokud na množině J existuje míra, pro kterou $\mu(B(r)) \asymp r^d$, pak Hausdorffova dimenze této množiny je rovna d . Tím je dokázáno, že hodnota t_0 , která nuluje tlak, je přesně Hausdorffova dimenze Juliovy množiny:

$$\dim_H(J(f)) = t_0 \iff P(t_0) = 0.$$

4. Unikátnost řešení: Funkce $P(t)$ je ostře klesající (protože $\log |f'| > 0$) a konvexní. Proto existuje právě jedno takové t_0 , kde graf protne nulu.

Tento výsledek, v literatuře často označovaný jako Bowen-Ruelleova věta, nám umožňuje převést problém výpočtu dimenze na hledání kořene funkce. Místo geometrického pokrývání množiny mřížkou hledáme takovou hodnotu t , pro kterou je systém v termodynamické rovnováze – tedy kdy partiční suma $Z_n(t)$ asymptoticky neroste ani neklesá. Platnost výše uvedeného Bowenova vzorce je podmíněna tím, že zobrazení f je na Juliově množině hyperbolické. To znamená, že existují konstanty $C > 0$ a $\lambda > 1$ takové, že pro derivaci n -té iterace platí $|(f^n)'(z)| \geq C\lambda^n$ pro všechna $z \in J(f)$. Tuto podmínku jsme v našem algoritmu explicitně ověřovali (viz sekce 2.4.2).

Významnou vlastností termodynamického přístupu je rychlost, s jakou numerické odhady konvergují ke skutečné dimenzi. Zatímco u geometrických metod je konvergence často pomalá a zatížena velkou chybou danou diskretizací, v případě Bowenovy metody pro hyperbolické systémy je konvergence **exponenciální**.

Označíme-li D_n aproximaci dimenze získanou z partiční sumy hloubky n (tj. řešení rovnice $P_n(D_n) = 0$), pak pro chybu odhadu platí asymptotický vztah [28]:

$$|D_n - \dim_H| \leq K\theta^n,$$

kde K je konstanta a $0 < \theta < 1$. Díky této vlastnosti jsme schopni i při relativně malém množství zkoumaných bodů dosáhnout přesnosti na několik desetinných míst, což je geometrickými metodami výpočetně nerealizovatelné.

3.7.1 Výpočet dimenze

Na základě teoretického rámce Bowen-Ruelleovy věty byl implementován numerický algoritmus, který určuje Hausdorffovu dimenzi invariantní množiny skrze hledání kořene tlakové funkce. Výpočetní postup lze rozdělit do tří navazujících fází: verifikace hyperbolicity, konstrukce stromu inverzních vzorů a vyčíslení nulového bodu tlaku.

Fáze 1: Numerické ověření hyperbolicity

Před zahájením samotného výpočtu dimenze algoritmus ověřuje nutnou podmínku platnosti Bowenova vzorce – hyperbolicity na Juliově množině. Tento krok využívá statistický přístup. Pomocí metody náhodné inverzní iterace je vygenerován reprezentativní vzorek bodů $S = \{z_1, \dots, z_N\} \subset J(f)$, který aproximuje Juliovu množinu. Algoritmus následně v každém bodě vzorku vyčíslí derivaci $|f'(z_i)|$ a hledá globální minimum expanze:

$$\lambda_{min} = \min_{z \in S} |f'(z)|.$$

Pokud platí $\lambda_{min} > 1$ (s nastavenou tolerancí, např. 1, 01), je systém považován za striktně rozpínavý a výpočet pokračuje.

Fáze 2: Konstrukce stromu a partičních sum

Jádrem algoritmu je výpočet posloupnosti partičních sum $Z_n(t)$ pro sadu testovacích hodnot parametru t . Jelikož pracujeme s kvadratickým zobrazením, každá iterace inverzního zobrazení $f^{-1}(z)$ generuje právě dva vzory. Struktura předchůcků bodu tak tvoří binární strom. Algoritmus prochází tento strom do hloubky N (v praxi $N = 12$ až 16 , počet bodů nám roste jako 2^N). Pro každý uzel stromu w v hloubce n počítáme kumulativní derivaci podél cesty od kořene (startovacího bodu z_0). Díky řetízkovému pravidlu platí:

$$|(f^n)'(w)| = \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(w))|.$$

Tato hodnota vstupuje do partiční sumy s váhou $-t$. Pro numerickou stabilitu je výpočet prováděn v logaritmické škále, kdy sčítáme logaritmy derivací.

Fáze 3: Hledání kořene tlakové funkce

Výsledkem předchozí fáze je sada hodnot tlaku $P_n(t) \approx \frac{1}{n} \log Z_n(t)$ pro diskrétní řadu hodnot $t \in \langle 1, 2 \rangle$. Algoritmus využívá lineární interpolaci mezi vypočtenými hodnotami k nalezení takového D_{Bowen} , pro které platí:

$$P(D_{Bowen}) \approx 0.$$

Přesnost výsledku je odhadována z analýzy konvergence posloupnosti odhadů pro různé hloubky stromu $(n, n - 1, \dots)$. Pokud posloupnost vykazuje oscilace nebo pomalou konvergenci, indikuje to blízkost fázového přechodu nebo narušení hyperbolicity.

Kapitola 4

Vizualizace Juliových množin

4.1 Escape time algorithm

První vizualizační přístup vychází přímo z definice Juliových množin a je založen na numerickém testování stability orbit v diskretizované oblasti. Na rozdíl od inverzní iterace, která generuje body náhodně, tento deterministický algoritmus zkoumá prostor systematicky bod po bodu. Postup lze shrnout do následujících kroků:

1. **Diskretizace oblasti:** Zvolíme obdélníkovou oblast v komplexní rovině ohraničenou reálnými a imaginárními mezemi $\langle s_{min}, s_{max} \rangle \times \langle v_{min}, v_{max} \rangle$. Tuto oblast pokryjeme mřížkou o rozměrech $m \times n$ bodů. Parametry m a n určují rozlišení výsledné vizualizace.
2. **Výpočet orbit:** Pro každý bod mřížky z_{ij} vygenerujeme posloupnost iterací $\{f^{ok}(z_{ij})\}_{k=1}^K$, kde K je maximální počet kroků.
3. **Testovací kritérium:** Pro každý bod rozhodujeme o jeho příslušnosti k Juliově množině na základě chování jeho orbity vůči zvolené hodnotě L :
 - Pokud $|f^{ok}(z)| < L$ pro všechna $k \leq K$, považujeme bod za stabilní a klasifikujeme jej jako kandidáta na bod vyplněné Juliovy množiny .
 - Pokud existuje $k \leq K$ takové, že $|f^{ok}(z)| \geq L$, bod unikl z vymezené oblasti a patří do Fatouovy množiny.
4. **Projekce na sféru:** Body jsou následně z komplexní roviny transformovány na Riemannovu sféru pomocí inverzní stereografické projekce. Tento krok umožňuje korektně zobrazit globální strukturu množiny bez zkreslení, které vzniká u metod v rovině v oblastech daleko od počátku.

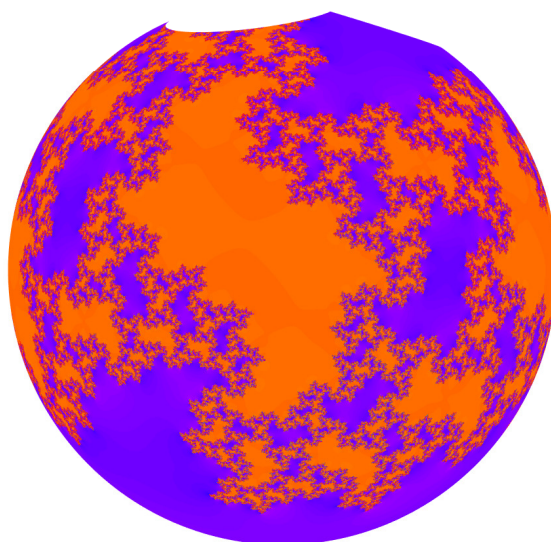
Poznámka 4.1. 1. Hodnota únikového poloměru L a rozsah obdélníku závisí na konkrétním typu zkoumané funkce. Například pro kvadratické polynomy $q_c(z) = z^2 + c$ se často volí hranice $[-2, 2]$ a $L = \max(|c|, 2)$, což vychází z teoretického odhadu, že po překročení této meze jde orbita nutně do nekonečna [10]. Pro naše racionální zobrazení f_p volíme parametry s ohledem na polohu atraktorů.

2. Tento algoritmus je univerzální a lze jej použít pro libovolnou holomorfní funkci.
3. Pro vizuálně bohatší výstup lze body ve Fatouově množině obarvit podle rychlosti úniku (tj. podle iterace k , ve které došlo k překročení meze L). Tím získáme tzv. *Escape Time Plot*, který zobrazuje úrovnice potenciálu v okolí Juliovy množiny.

Parametry vizualizace

$$f_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - \bar{p}z^2}$$

Parametr p :	$p = \tan(t) \cdot e^{is}$
Hodnoty:	$t = 0,8, \quad s = 0,5$
Mez konvergence:	$L = 2$
Rozlišení mřížky:	10000 × 10000 bodů
Rozsah:	$\langle -3,3 \rangle \times \langle -3,3 \rangle$
Počet iterací:	$N = 70$



4.1.1 Modifikace algoritmu

Původní mřížková metoda v komplexní rovině naráží na limity při vizualizaci globální struktury Juliovy množiny. Vzhledem k tomu, že planární mřížka je vždy omezena konečným obdélníkem, při zpětné projekci na sféru nutně chybí informace o chování funkce v okolí severního pólu koule (nekonečna). Výsledný obraz by tak postrádal vrchlík odpovídající vnějšku tohoto obdélníku. Abychom zajistili rovnoměrné pokrytí celé Riemannovy sféry, modifikujeme algoritmus tak, že diskretizujeme přímo povrch sféry a iterace provádíme následovně:

1. **Diskretizace sféry (Sférická mřížka):** Namísto kartézské mřížky definujeme síť bodů přímo na jednotkové sféře S^2 pomocí sférických souřadnic:

- azimutální úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
- polární úhel $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$.

Vytvoříme mřížku dvojic (θ_i, φ_j) , která pokrývá celý povrch. Pro rovnoměrnější rozložení bodů (aby nedocházelo k přehustění u pólů) lze volit krok v θ nelineárně, nebo využít dělení stěn vepsaného mnohostěnu.

2. **Projekce do výpočetní roviny:** Každý bod sféry se souřadnicemi (θ_i, φ_j) převedeme do komplexní roviny \mathbb{C} pomocí stereografické projekce. Odpovídající počáteční bod z_0 získáme vztahem:

$$z_0 = \cot\left(\frac{\theta_i}{2}\right) e^{i\varphi_j}.$$

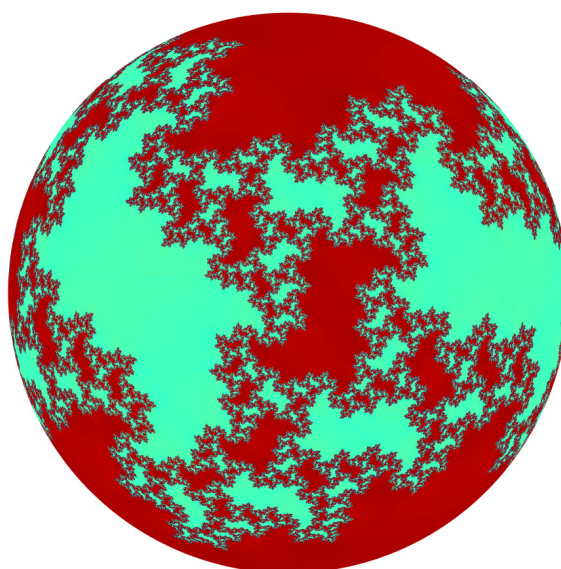
Tímto krokem zajistíme, že testujeme i body s libovolně blízké nekonečnu, které by v omezeném obdélníku chyběly. (*Poznámka: Pro $\theta \rightarrow 0$, tj. severní pól, nastavujeme numericky z_0 jako "inf" nebo dostatečně velké číslo.*)

3. **Iterace:** S takto získaným bodem z_0 provedeme standardní iteraci $z_{k+1} = f(z_k)$. Klasifikace bodu probíhá analogicky:
- Bod (θ_i, φ_j) na sféře obarvíme jako prvek Juliovy množiny, pokud jeho orbita v rovině zůstává omezená.
 - V opačném případě bod náleží do Fatouovy množiny.
4. **Vizualizace:** Výsledkem je přímo sféra. Odpadá nutnost zpětné 3D transformac bodů, neboť barvu přiřazujeme přímo souřadnicím povrchu koule. Pro porovnání vygenerujeme množinu pro stejnou konstantu p s následujícími parametry

Parametry vizualizace

$$f_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - \bar{p}z^2}$$

Parametr p :	$p = \tan(0,8) \cdot e^{0,5i}$
Rozlišení sféry:	$49 \cdot 10^6$
Mez konvergence:	$L = 2$
Počet iterací:	$N = 70$



Při srovnání výsledků obou přístupů je patrný zásadní rozdíl v oblasti severního pólu (bodu nekonečna). Zatímco standardní metoda aplikovaná na omezený obdélník v rovině vede po projekci nutně ke vzniku prázdného vrchlíku na sféře odpovídajícího vnějšku výpočetní oblasti, algoritmus přímé sférické iterace pokrývá plochu zcela rovnoměrně. výměnou za tuto úplnost je však nárůst výpočetního času. Ten je způsoben nutností provádět nelineární transformaci souřadnic v každém jednotlivém kroku smyčky.

4.2 Inverzní iterační metoda (IIM)

Následující algoritmus, vycházející z reálného případu Chaos game, kterým jsem se zabýval v [36], představuje v kontextu této práce klíčový numerický nástroj. Nejedná se pouze o prostředek k vizuální prezentaci výsledků, ale o primární generátor dat, který nám umožňuje diskrétně aproximovat Juliovu množinu s vysokou přesností. Právě množiny bodů vygenerované tímto algoritmem slouží jako vstup pro následné kvantitativní analýzy jako vyšetřování okolí pevných bodů, nebo numerické odhady Hausdorffovy dimenze výše popsanými algoritmy.

4.2.1 Matematický princip metody inverzní iterace

Algoritmus metody inverzní iterace, který využíváme pro vizualizaci na sféře, ale stojí na teorii iterovaných systémů funkcí (IFS). Ačkoliv byla tato teorie původně využívána pro reálné fraktály, jako Barnsleyho kapradina, její aplikace v komplexní dynamice na Riemannově sféře je zcela analogická. Pro potřeby naší práce, kde zkoumáme globální strukturu množin, budeme za náš metrický prostor považovat Riemannovu sféru $\hat{\mathbb{C}}$ vybavenou chordální metrikou χ .

Definice 4.2 (Systém iterovaných funkcí). Nechť (S, ρ) je úplný metrický prostor (v našem případě $S = \hat{\mathbb{C}}$ a $\rho = \chi$). Konečnou množinu kontrahujících zobrazení $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, kde $n \geq 2$, nazveme **systémem iterovaných funkcí** (IFS). Kompaktní množinu $K \subset S$ nazveme *invariantní množinou* (nebo atraktorem) tohoto systému, pokud platí:

$$K = \bigcup_{i=1}^n w_i(K).$$

Jako ilustrativní příklad IFS uveďme Sierpiňského trojúhelník, který jsme zmiňovali v předchozích částech práce. Tento fraktál je generován souborem tří afinních kontrakcí. Jako konkrétní příklad IFS uveďme Sierpiňského trojúhelník, který je v této práci definován systémem tří afinních zobrazení ve tvaru:

$$f_i(x) = A_i x + b_i.$$

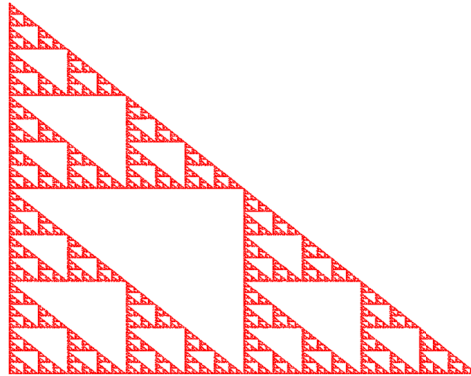
Lineární část transformace je pro všechna $i = 1, 2, 3$ shodná a je určena diagonální maticí

$$A_i = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé vektory posunutí jsou pak dány jako

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Pomocí těchto funkcí dokážeme modelovat tvar této množiny. Modeování těchto reálných množin jsem se věnoval ve své bakalářské práci [36], nebo lze použít [27].



Obrázek 4.1: Sierpiňského trojúhelník modelovaný pomocí IFS metodou chaos game

V kontextu naší práce hrají roli zobrazení w_i právě jednotlivé větve inverzního zobrazení f_p^{-1} . Protože f_p je stupně 2, náš IFS se skládá ze dvou funkcí ($n = 2$). Invariance Juliovy množiny $J(f_p)$ vůči f_p^{-1} (tj. $J(f_p) = f_p^{-1}(J(f_p))$) je přesně vlastností popisovanou v definici výše. Abychom pochopili, jak se algoritmus k této množině blíží, musíme zavést metriku na prostoru množin.

Definice 4.3 (Hausdorffova metrika). Buď (S, ρ) metrický prostor. Označme $\mathcal{H}(S)$ prostor všech neprázdných kompaktních podmnožin S . Pro dvě množiny $A, B \in \mathcal{H}(S)$ definujeme Hausdorffovu metriku jako:

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A) \right\},$$

kde $\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x, y)$ je vzdálenost bodu od množiny. Prostor $(\mathcal{H}(S), \rho_H)$ nazýváme Hausdorffův nadprostor.

Důvod, proč metoda Chaos game funguje a proč vygenerované body vykreslí Juliovu množinu, shrnuje následující věta (Hutchinson, 1981):

Věta 4.4 (O existenci atraktoru). Buď (S, ρ) úplný metrický prostor a $\{w_1, \dots, w_n\}$ systém kontrahujících zobrazení. Pak existuje jediná neprázdna kompaktní množina $K \in \mathcal{H}(S)$ (atraktor IFS), která je invariantní vůči systému, tj. $K = \bigcup w_i(K)$. Navíc, pro libovolnou počáteční kompaktní množinu $A_0 \in \mathcal{H}(S)$ konverguje posloupnost množin definovaná předpisem $A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^n w_i(A_k)$ k atraktoru K v Hausdorffově metrice:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_H(A_k, K) = 0.$$

Aplikace na racionální zobrazení na sféře

Zatímco pro polynomy v rovině $f_c(z) = z^2 + c$ jsou inverzní větve $w_{1,2}(z) = \pm \sqrt{z-c}$ globálními kontrakcemi v euklidovské metrice, u racionálních lomených funkcí je situace složitější. Juliova množina je však vždy repelerem pro dopředné iterace, a tedy atraktorem pro inverzní iterace. Algoritmus pro naše zobrazení $f_p(z) = \frac{z^2+p}{1-\bar{p}z}$ tedy definujeme takto:

1. IFS: Systém tvoří dvě větve inverzního zobrazení:

$$w_1(z) = \sqrt{\frac{z-p}{1+z\bar{p}}}, \quad w_2(z) = -\sqrt{\frac{z-p}{1+z\bar{p}}}.$$

2. Vizualizace: Výsledné body z_n nejsou vykreslovány do roviny, ale jsou v každém kroku mapovány na sféru S^2 . Tím získáváme korektní obraz invariantní množiny, která je v případě racionálních funkcí uzavřenou křivkou (či složitějším útvarem) na povrchu koule, nikoliv pouze neomezeným útvarem v rovině.

Samotný výpočetní proces vizualizace Juliovy množiny metodou inverzní iterace lze rozdělit do čtyř navazujících fází

1. **Inicializace a volba parametrů:** Na počátku zvolíme komplexní parametr p definující zkoumané zobrazení f_p . Dále nastavíme parametry simulace:

- N : celkový počet bodů, které chceme vygenerovat (typicky 10^5 až 10^7).
- z_0 : počáteční bod iterace. Vzhledem k tomu, že Juliova množina je globálním atraktorem pro f^{-1} , může být z_0 zvoleno libovolně v \mathbb{C} (např. $z_0 = 0$), s výjimkou případných superatraktivních pevných bodů (jako třeba 0 pro konstantu $p = 0$), avšak pravděpodobnost, že se u nějaké jiné dvojice z_0 a p trefíme do takového je nulová.

2. **Odvození inverzního kroku:** V každém kroku algoritmu hledáme vzor aktuálního bodu z_k . Řešíme tedy rovnici $f_p(w) = z_k$:

$$\frac{w^2 + p}{1 - \bar{p}w^2} = z_k.$$

Po algebraické úpravě získáváme vyjádření pro w^2 :

$$w^2 = \frac{z_k - p}{1 + z_k \bar{p}}.$$

Tato kvadratická rovnice má v komplexním oboru dvě řešení, která odpovídají dvěma větvím inverzní funkce:

$$w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{z_k - p}{1 + z_k \bar{p}}}.$$

3. **Generování bodů:** Následuje hlavní smyčka o délce N . V každém kroku:

- (a) V každém kroku iterace uvažujeme systém iterovaných funkcí (IFS) složený ze dvou inverzních větví:

$$w_1(z) = \sqrt{\frac{z - p}{1 + z \bar{p}}}, \quad w_2(z) = -\sqrt{\frac{z - p}{1 + z \bar{p}}}.$$

- (b) generujeme náhodnou proměnnou $r \in \langle 0, 1 \rangle$.
(c) Na základě hodnoty r vybereme jednu z funkcí našeho systému a aplikujeme ji na aktuální bod z_k . S pravděpodobností $P(w_1) = P(w_2) = 0,5$ tedy nastavíme:

$$z_{k+1} = \begin{cases} w_1(z_k) & \text{pro } r \leq 0,5, \\ w_2(z_k) & \text{pro } r > 0,5. \end{cases}$$

- (d) Výsledný bod z_{k+1} , uložíme do paměti pro následnou projekci.

4. **Projekce na Riemannovu sféru:** Výstupem předchozího kroku je množina bodů v komplexní rovině. Pro finální vizualizaci, která zahrnuje i okolí nekonečna, převedeme každý bod $z = x + iy$ na souřadnice $[X, Y, Z]$ na jednotkové sféře pomocí inverzní stereografické projekce:

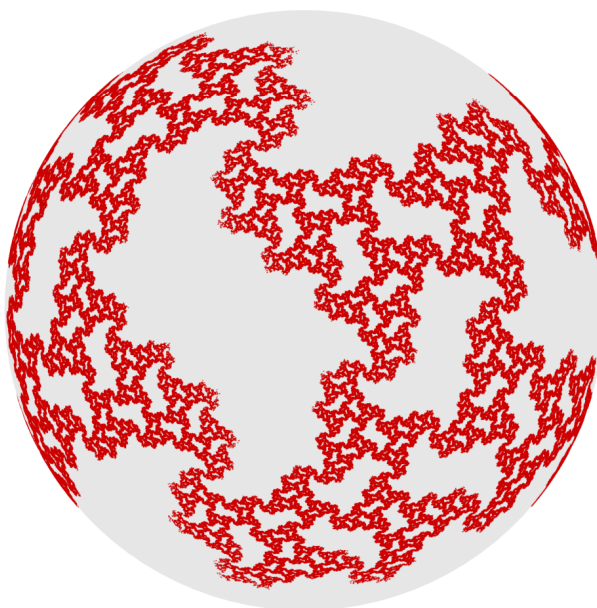
$$X = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad Y = \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Výsledkem algoritmu je soubor 3D souřadnic, který reprezentuje diskretní aproximaci Juliovy množiny invariantní vůči zadané racionální funkci. Opět pro srovnání použijeme tento algoritmus pro generování stejné množiny jako v předchozích případech.

Parametry vizualizace

$$f_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - \bar{p}z^2}$$

Parametr p :	$p = \tan(t) \cdot e^{is}$
Hodnoty:	$t = 0,8, \quad s = 0,5$
Počet iterací	$n = 10^8$
Počáteční bod:	$z_0 = 0$

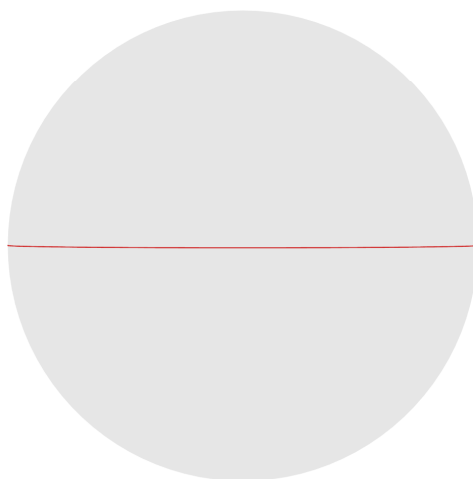


Kapitola 5

Analýza Juliových množin

V této kapitole aplikujeme představené numerické metody na studium dynamického systému definovaného racionálním zobrazením f_p . Cílem následující analýzy je získat konkrétní charakteristiky zkoumaných množin v závislosti na parametru p . Zaměříme se primárně na nalezení a klasifikaci periodických orbit a numerickou aproximaci Hausdorffovy dimenze pomocí metod box-counting, korelační dimenze, spektrální dimenze, dimenze náhodné procházky a bowenovy dimenze.

Začněme s testovacím příkladem pro $f_0(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$. Tvar příslušné Juliovy množiny je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Z definice topologické i Hausdorffovy dimenze plyne, že pro hladké křivky je jejich dimenze rovna jedné. Pokud naše numerické algoritmy fungují správně, měly by pro tento případ vrátit hodnotu blížíící se 1. Jakákoliv výrazná odchylka by indikovala chybu v implementaci nebo nastavení parametrů.



Obrázek 5.1: Juliova množina funkce f_p pro parametr $p = 0$ a počtu iterací 10^7

Konfigurace IIM a analýza lokální dynamiky

1. Parametry vizualizace (Chaos Game):

Zobrazení:	$p = 0$
Počet iterací:	$N = 10^7$
Počáteční bod:	$z_0 = 1$

2. Detekované invariantní cykly (do $n = 4$):

<i>Perioda</i>	<i>Souřadnice bodu (z_0)</i>	<i>Násobitel (λ)</i>	<i>Stabilita</i>
1	$z_1 = 0$	$ \lambda = 0$	superatraktivní
	$z_2 = 1$	$ \lambda = 2$	odpuzující
2	$z_1 = -0,5 + 0,866i$	$ \lambda = 4$	odpuzující
	$z_2 = -0,5 - 0,866i$		
3	$z_a = -0,901i + 0,4339i$	$ \lambda = 8$	odpuzující
	$z_b = 0,6235 - 0,7818i$		
	$z_c = -0,2225 - 0,9749i$		
3	$z_1 = -0,901i - 0,4339i$	$ \lambda = 8$	odpuzující
	$z_2 = 0,6235 + 0,7818i$		
	$z_3 = -0,2225 + 0,9749i$		
4	$z_a = -0,9781 + 0,2079i$	$ \lambda = 16$	odpuzující
	$z_b = 0,9135 - 0,4067i$		
	$z_c = 0,6691 - 0,7431i$		
	$z_d = -0,1045 - 0,9945i$		
4	$z_1 = -0,9781 - 0,2079i$	$ \lambda = 16$	odpuzující
	$z_2 = 0,9135 + 0,4067i$		
	$z_3 = 0,6691 + 0,7431i$		
	$z_4 = -0,1045 + 0,9945i$		
4	$z_1 = -0,8090 + 0,5878i$	$ \lambda = 16$	odpuzující
	$z_2 = 0,3090 - 0,9511i$		
	$z_3 = -0,8090 - 0,5878i$		
	$z_4 = -0,3090 + 0,9511i$		

Souhrnné výsledky a parametry analýzy dimenzí

Parametr systému: $p = 0$

Naměřené hodnoty

- **Box-counting dimenze:** $D_0 \approx 1,0393$
- **Korelační dimenze:** $D_2 \approx 1,0134$
- **Bowenova dimenze:** $D_{Bowen} = 1$
- **Dimenze náhodné procházky:** $d_w \approx [1,97]$
- **Spektrální dimenze:** $d_s \approx [0,99]$
- **Alexander-Orbachova domněnka:** $D_H \approx 0,975$

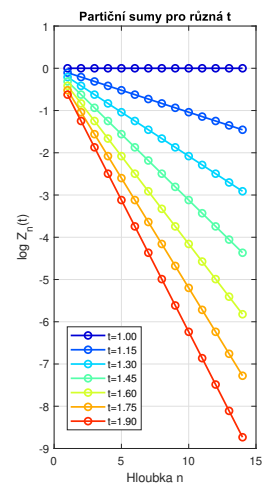
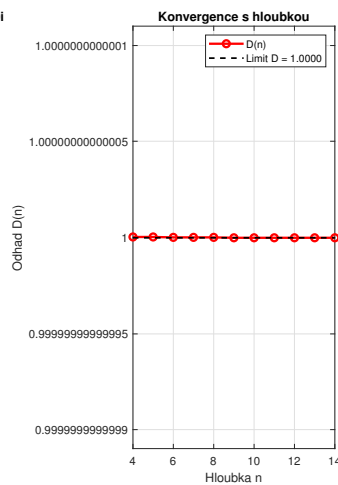
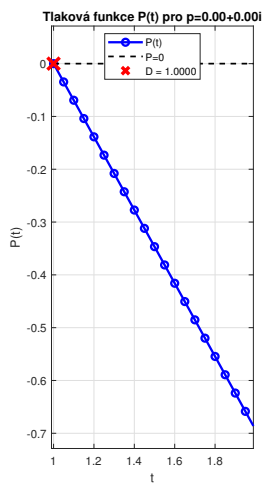
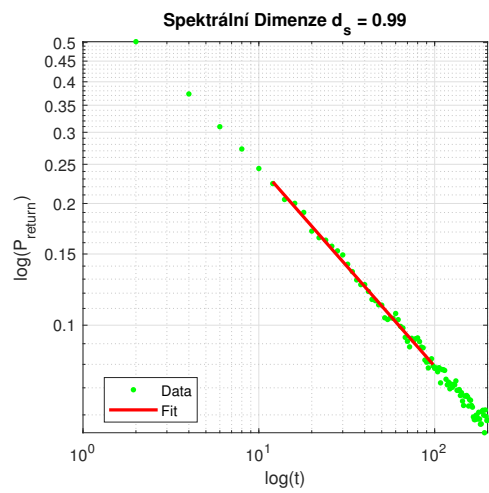
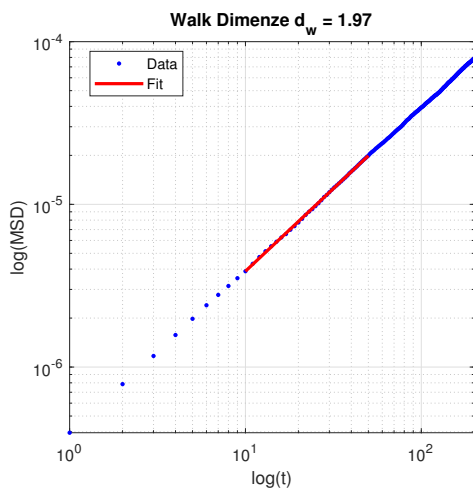
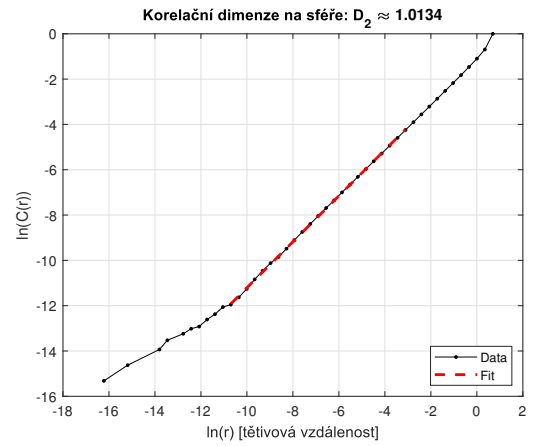
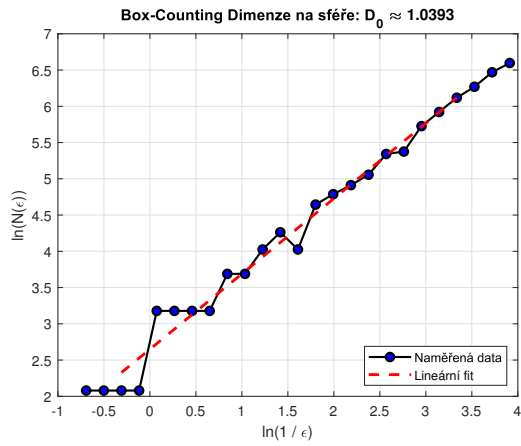
Nastavení algoritmů

- **Box-counting (D_0):**
 - Rozsah velikosti boxů: $\epsilon \in \langle 2, 0,002 \rangle$
- **Korelační (D_2):**
 - Rozsah poloměrů: $r \in \langle 2, 10^{-3} \rangle$
- **Bowenova (D_{Bowen}):**
 - Metoda: Hledání kořene tlakové funkce $P(t) = 0$
 - Hloubka rekurze / Počet preimagů: $k = [14]$
- **Náhodná procházka (D_w) a Spektrální (D_s):**
 - Počet chodců : $W = 2000$
 - Maximální čas (kroky): $T_{max} = 500$

Cílem kalibrační fáze bylo ověřit přesnost implementovaných algoritmů na objektu se známou topologií. Naměřené hodnoty vykazují vysokou shodu s teorií. Odchylka v řádu jednotek procent je způsobena diskrétní povahou mřížky a konečným počtem bodů vzorku. Přesnější výsledek u korelační dimenze potvrzuje její vyšší robustnost vůči diskretizačním chybám. Naměřená dimenze procházky $D_w \approx 1,97$ se blíží teoretické hodnotě 2,0. Spektrální dimenze $D_s \approx 0,99$ odpovídá teoretické hodnotě 1. Výsledek $D_{Bowen} = 1$ je v naprosté shodě s analytickým předpokladem. Alexander-Orbachova relace, odhad Hausdorffovy dimenze odvozený z dynamických exponentů, je rovněž v těsné blízkosti očekávané hodnoty 1.

Získané výsledky potvrzují, že použité numerické metody i nastavení parametrů jsou korektní a schopné správně kvantifikovat vlastnosti zkoumané množiny. Drobné numerické odchylky jsou v rámci očekávání. Pro dokumentaci průběhu kalibrace jsou níže přiloženy grafické výstupy jednotlivých metod,

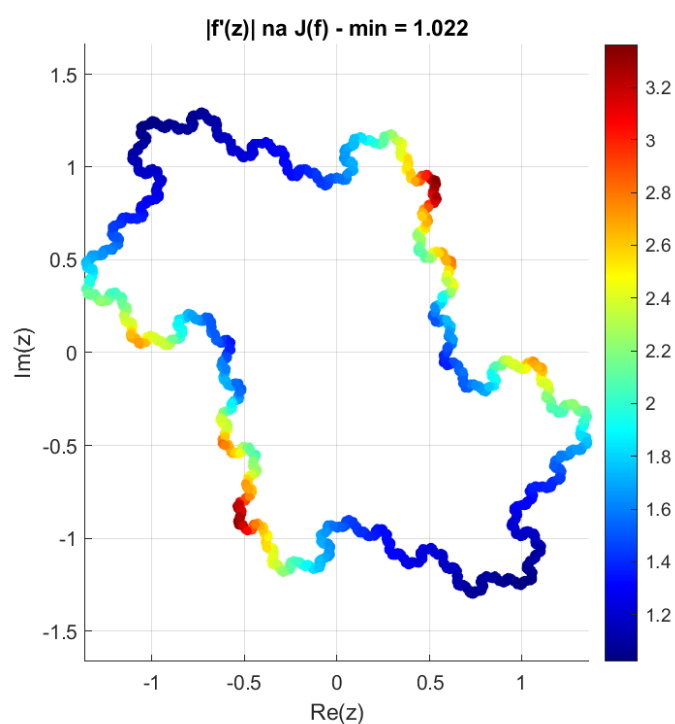
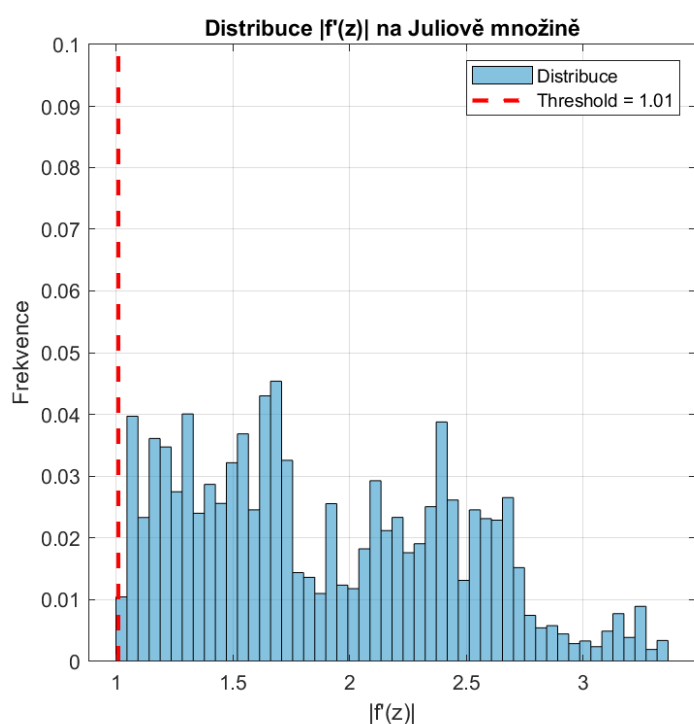
zobrazující závislosti, ze kterých byly výše uvedené hodnoty dimenzí odvozeny pomocí lineární regrese.



5.1 Hyperbolické případy

Po ověření metodiky na triviálním případě kružnice přistoupíme k analýze netriviální fraktální struktury definované parametrem $p = 0,15 + 0,31i$. Jak je patrné z vizualizace na Obrázku níže, Juliova množina v tomto případě tvoří souvislou uzavřenou smyčku, topologicky ekvivalentní kružnici, avšak s nekonečně členitým okrajem (kvazikružnici).

Z dynamického hlediska se jedná o hyperbolické zobrazení. Tato vlastnost, zajišťuje strukturální stabilitu systému. Absence parabolických bodů a kritických bodů na hranici nám umožňuje očekávat vhodné výsledky numerických metod pro odhad fraktální dimenze, která by v tomto případě měla ostře přesahovat hodnotu 1.



Obrázek vlevo znázorňuje hodnoty derivace funkce f_p na Juliově množině, je zřejmé že tyto hodnoty jsou odrazeny od kritické hodnoty 1, a tedy zobrazení je hyperbolické. Obrázek vpravo zobrazuje rozmístění zkoumaných bodů, které jsou obarveny podle hodnoty derivace.

Konfigurace IIM a analýza lokální dynamiky

1. Parametry vizualizace (Chaos Game):

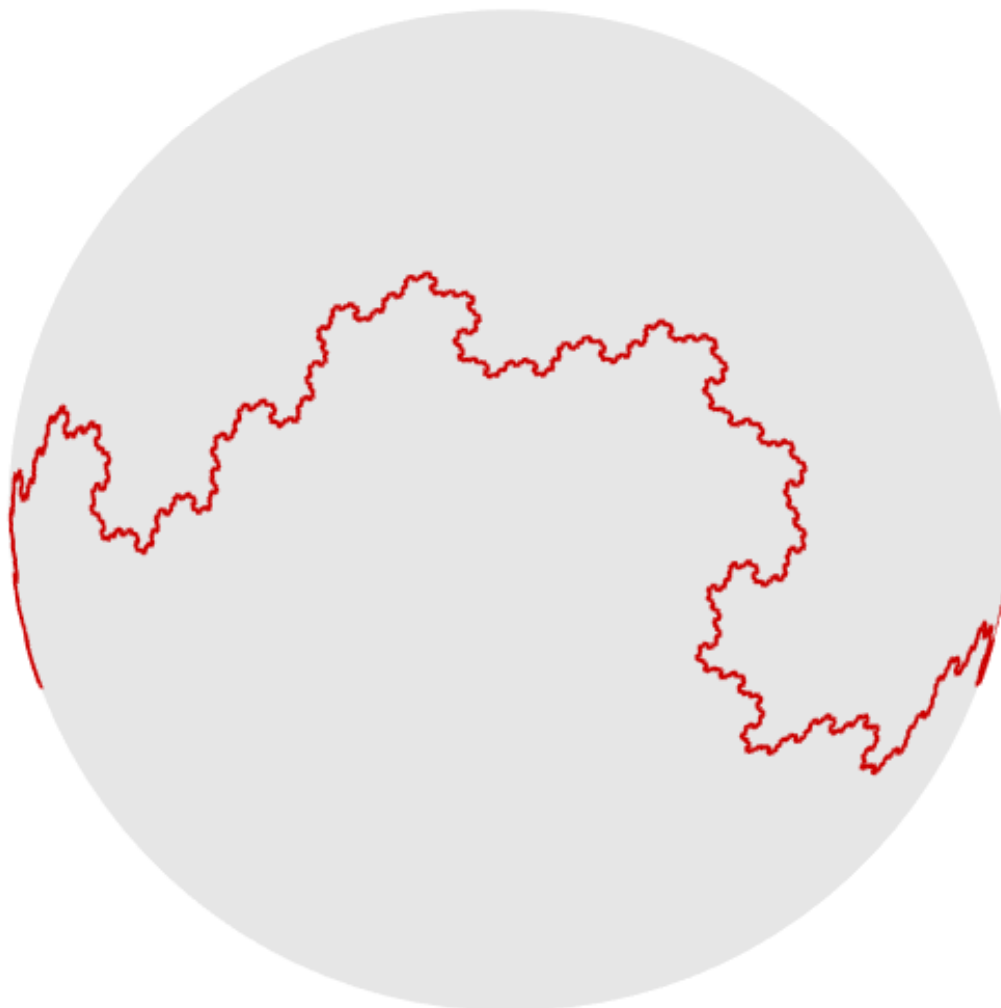
Parametr systému: $p = 0,1500 + 0,3100i$

Počet iterací: $N = 10^7$

Počáteční bod: $z_0 = 1$ (mimo $J(f_p)$)

2. Detekované invariantní cykly (do $n = 4$):

Per.	Souřadnice bodu (z)	Násobitel ($ \lambda $)	Stabilita
1	$-2,1436 - 2,8093i$	0,6074	Atraktivní
	$0,0310 + 0,3283i$	0,7227	Atraktivní
	$0,8478 - 0,1328i$	1,9323	Odpuzující
2	$-0,6462 + 1,2234i$	3,4449	Odpuzující
	$-0,5153 - 0,7998i$		
3	$-1,3447 + 0,3102i$	4,8895	Odpuzující
	$1,0613 - 1,2180i$		
	$-0,2884 - 1,1835i$		
3	$-0,5371 - 0,2570i$	5,2778	Odpuzující
	$0,4430 + 0,6513i$		
4	$-0,2725 + 0,9871i$	11,7557	Odpuzující
	$-1,1828 + 0,6921i$		
	$0,3528 - 1,1058i$		
	$-0,6058 - 0,4305i$		
4	$0,3810 + 1,0355i$	11,3670	Odpuzující
	$-1,0283 + 0,0562i$		
	$1,2645 - 0,2742i$		
4	$1,0955 - 1,0289i$	5,9384	Odpuzující
	$-0,0857 - 1,1395i$		
	$-0,5717 + 0,0543i$		
	$0,5105 + 0,1976i$		
4	$0,4342 + 0,5476i$		
	$-0,0646 + 0,8957i$		



Obrázek 5.3: Juliova množina odpovídající zobrazení f_p pro $p = 0,15 + 0,31i$ a počet iterací 10^7

Souhrnné výsledky a parametry analýzy dimenzí

Parametr systému: $p = 0,15 + 0,31i$

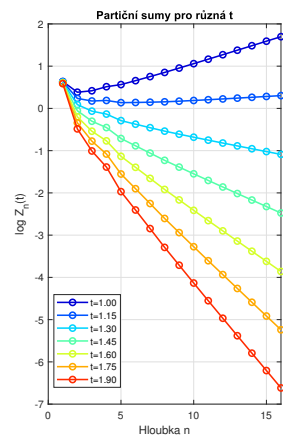
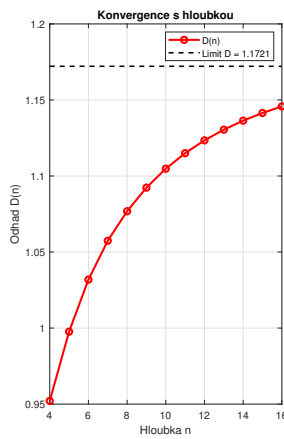
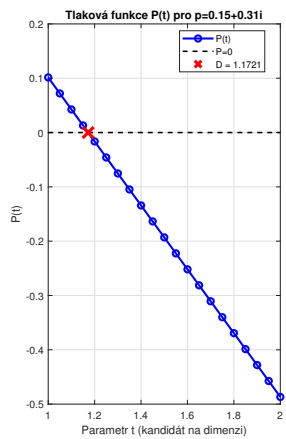
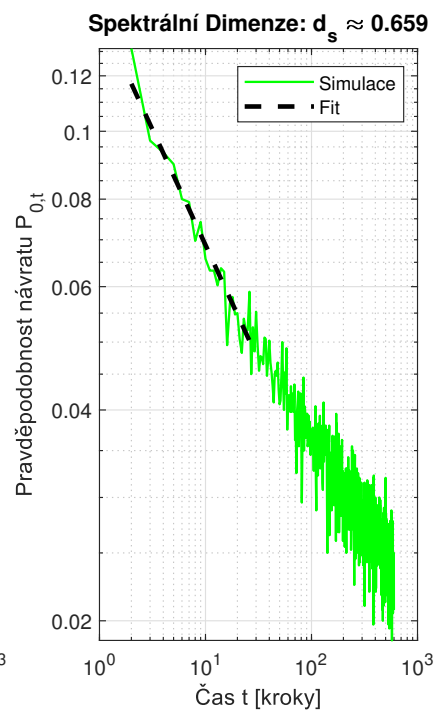
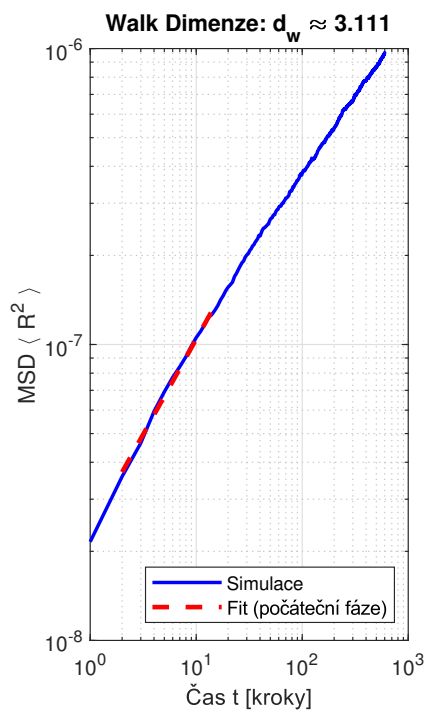
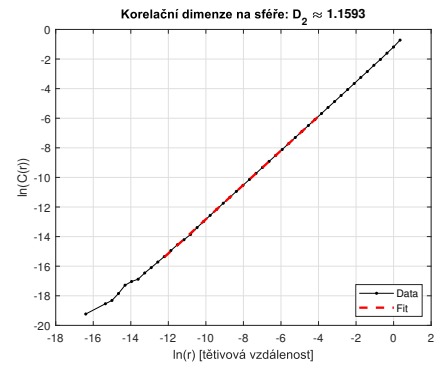
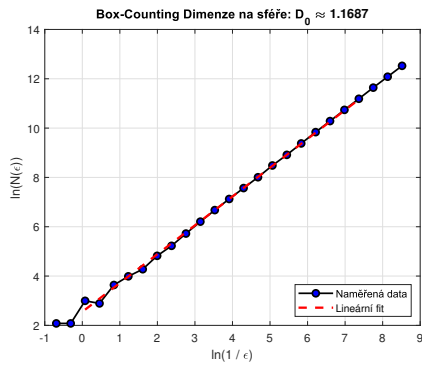
Naměřené hodnoty

- **Box-counting dimenze:** $D_0 \approx 1,1687$
- **Korelační dimenze:** $D_2 \approx 1,1593$
- **Bowenova dimenze:** $D_{Bowen} = 1,1721$
- **Dimenze náhodné procházky:** $d_w \approx 3,111$
- **Spektrální dimenze:** $d_s \approx 0,659$
- **Alexander-Orbachova domněnka:** $D_H \approx 1,0250$

Nastavení algoritmů

- **Box-counting (D_0):**
 - Rozsah velikosti boxů: $\epsilon \in \langle 2, 0,00002 \rangle$
- **Korelační (D_2):**
 - Rozsah poloměrů: $r \in \langle 2, 10^{-3} \rangle$
- **Bowenova (D_{Bowen}):**
 - Metoda: Hledání kořene tlakové funkce $P(t) = 0$
 - Chyba: $\pm 0,0045$
 - Hloubka rekurze / Počet preimagů: $k = 16$
- **Náhodná procházka (D_w) a Spektrální (D_s):**
 - Počet chodců (Walkers): $W = 4000$
 - Maximální čas (kroky): $T_{max} = 600$

Naměřené hodnoty potvrzují fraktální charakter množiny. Box-counting dimenze je ve shodě s bowenovou dimenzí s chybou menší než 3%. To dokazuje, že algoritmus správně zachytil zvrásnění kvazikružnice. Korelační dimenze splňuje teoretickou nerovnost $D_2 \leq D_0$. Simulace náhodné procházky odhalila výrazné zpomalení difuzního procesu, což je typické pro fraktální struktury. Částice na členité Juliově množině zasekávají v lokálních záhybech a jejich střední kvadratická výchylka roste pomalu ($\langle r^2 \rangle \sim t^{2/3,11}$). Nízká spektrální dimenze značí, že náhodný chodec má vysokou tendenci vracet se do výchozího bodu. Odchylka Alexander-Orbachovy domněnky pomocí vztahu $D_f \approx D_s D_w / 2$ je nižší než skutečná dimenze. Tato diskrepance je u Juliovy množiny očekávaným jevem.



Pro demonstraci závislosti dimenze na volbě parametru p byla provedena série kontrolních měření pro sadu obecných komplexních čísel. Aby byla zaručena přímá porovnatelnost s předchozími výsledky, bylo u všech experimentů zachováno identické nastavení numerických algoritmů (rozlišení mřížky pro box-counting, počet bodů IIM i konvergenční kritéria) jako v případě $p = 0, 15 + 0, 31i$. Cílem této komparace je ilustrovat, jak různé kombinace reálné a imaginární složky parametru ovlivňují geometrickou složitost výsledné množiny.

Tabulka 5.1: Srovnání různých typů dimenzí pro vybrané parametry $p \in \mathbb{C}$. Tabulka ukazuje vztah mezi geometrickými dimenzemi, dynamickým odhadem a Bowenovým odhadem dimenze.

Parametr p	Box-count.	Korelační	Alex.-Orb.	Bowenova
0, 10	0,9605	1,0143	0,8532	1,0141
0, 20	1,0210	1,0622	0,8855	1,0865
0, 23	1,0702	1,0856	1,7547	1,1043
0, 10i	0,9716	1,0159	0,8645	1,0148
0, 20i	1,0204	1,0504	0,8385	1,0572
0, 3i	1,1035	1,1247	1,0087	1,1344
0, 10 + 0, 1i	0,9965	1,0332	0,7794	1,0293
0, 10 + 0, 2i	1,0454	1,0748	0,7749	1,0744
0, 10 + 0, 3i	1,1282	1,1348	0,8605	1,1555
0, 10 + 0, 33i	1,1473	1,1691	0,9092	1,1668
0, 20 + 0, 10i	1,0578	1,0763	0,9170	1,0933
0, 20 + 0, 20i	1,1101	1,1034	0,9303	1,1281
0, 20 + 0, 29i	1,1858	1,1638	0,9930	1,2189

Poznámka: Alex.-Orb. je odhad Hausdorffovy dimenze $D = D_s D_w / 2$.

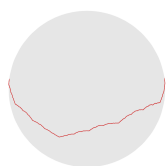
Z provedené srovnávací analýzy vyplývá několik klíčových poznatků o chování numerických metod a geometrii Juliovy množiny v hyperbolické oblasti:

1. Pro hodnoty parametru blízké nule (např. $p = 0, 10$ nebo $p = 0, 10i$), kde je Juliova množina jen mírně deformovanou kružnicí, vykazuje korelační dimenze výrazně lepší shodu s Bowenovou dimenzí než metoda box-counting. Zatímco box-counting má vlivem diskretizace tendenci hodnotu mírně podhodnocovat, korelační integrál je vůči těmto chybám robustnější a věrně kopíruje teoretický nárůst dimenze nad hodnotu 1.
2. Zajímavým zjištěním je nesymetrický vliv reálné a imaginární části parametru na složitost fraktálu. Při srovnání parametrů se stejným modulem, například $p = 0, 20$ a $p = 0, 20i$, dosahuje teoretická dimenze vyšších hodnot pro reálný případ. To naznačuje, že deformace podél reálné osy přispívá k vrásnění množiny intenzivněji než deformace podél osy imaginární.
3. Hodnoty Alexander-Orbachova odhadu jsou ve většině případů nižší než ostatní odhady dimenze. Tento trend je konzistentní napříč celým spektrem parametrů a potvrzuje, tato metoda není vhodná pro měření těchto struktur, smysl tedy má pouze výpočet jednotlivých složek, tedy spektrální a

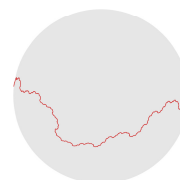
dimenzi náhodné procházky. Hodnoty těchto dimenzí nám říkají, jestli má množina mnoho slepých ramen a jak rychle body uniknou z nějakého okolí výchozího.

4. Maximální dimenze je dosaženo při kombinaci obou složek s vyšším modulem $p = 0, 20 + 0, 29i$, kde $D \approx 1, 22$. Data potvrzují, že se vzrůstající vzdáleností parametru od počátku komplexní roviny roste fraktální dimenze, přičemž tento nárůst je spolehlivě zachycen jak Bowenovým vzorcem, tak korelační analýzou.

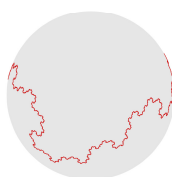
Pro vizuální kontext k výše uvedeným datům byly z tabulky vybrány tři reprezentativní případy. Následující obrázek zobrazuje příslušné Juliovy množiny, na kterých lze přímo pozorovat, jak se s rostoucí hodnotou parametru (a tedy i dimenze) mění topologie a míra zvrásnění množiny.



(a) Juliova množina pro parametr $p = 0, 1$



(b) Juliova množina pro parametr $p = 0, 1 + 0, 2i$



(c) Juliova množina pro parametr $p = 0, 2 + 0, 29i$

Obrázek 5.5: Srovnání vizualizací pro různé parametry.

5.2 Nehyperbolický případ

Závěrečnou část analýzy věnujeme parametru $p = 1$. Tento specifický případ odpovídá v řeči kvantových protokolů aplikaci Hadamardova hradla na bazické stavy. Tato unitární transformace H převádí standardní bázi do báze diagonální (vytváří symetrickou superpozici). Maticově je Hadamardova transformace definována jako:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

V kontextu odvozeného purifikačního protokolu (viz sekce 1.2) je obecná unitární rotace parametrizována úhly θ a φ . Pro Hadamardovo hradlo platí, že rotuje stav o úhel $\theta = \pi/4$ (45°) s nulovou fází $\varphi = 0$. Parametr p , který určuje tvar nelineárního zobrazení, je definován vztahem:

$$p = \tan(\theta) \cdot e^{i\varphi}.$$

Dosažením hodnot pro Hadamardovu transformaci získáváme:

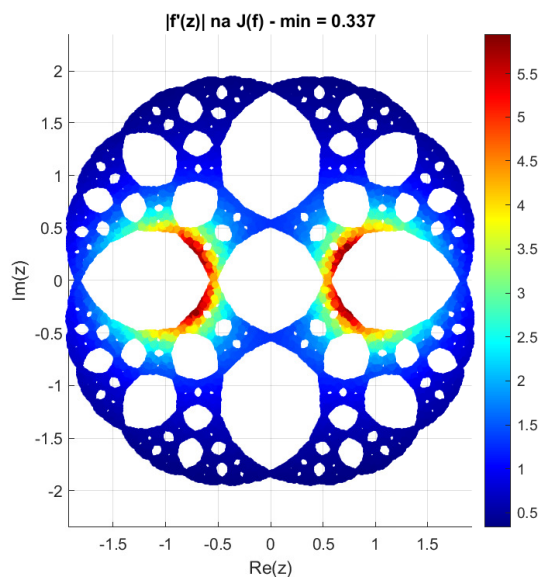
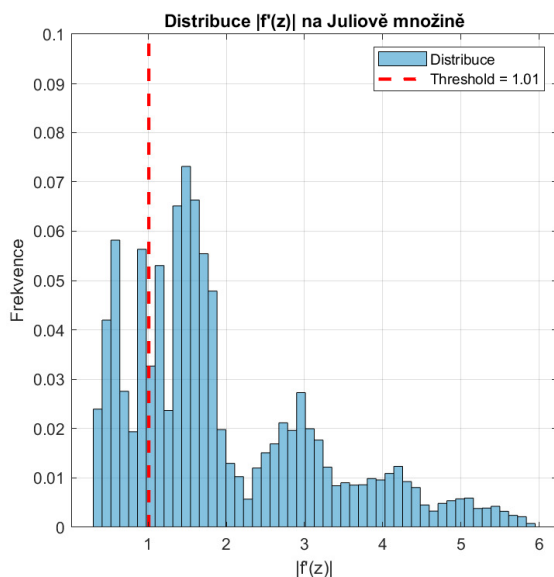
$$p_H = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Výsledné iterační zobrazení purifikačního protokolu $f_p(z)$ pro tento případ přechází do tvaru:

$$f_1(z) = \frac{z^2 + 1}{1 - z^2}.$$

. Fyzikálně tento stav odpovídá situaci, kdy jsou amplitudy pravděpodobnosti pro stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$ vyrovnány. Více v [3].

Zobrazení zde nemá hyperbolicitu, jak je vidět na obrázku níže, tak hodnota derivace funkce není odrazena od 1, tedy nemáme zajištěnu konvergenci Bowenovy dimenze. Následující měření proto slouží jako test implementovaných algoritmů, zda-li jsou schopny vracet přijatelné hodnoty, i když nemáme odhad exponenciální chyby.

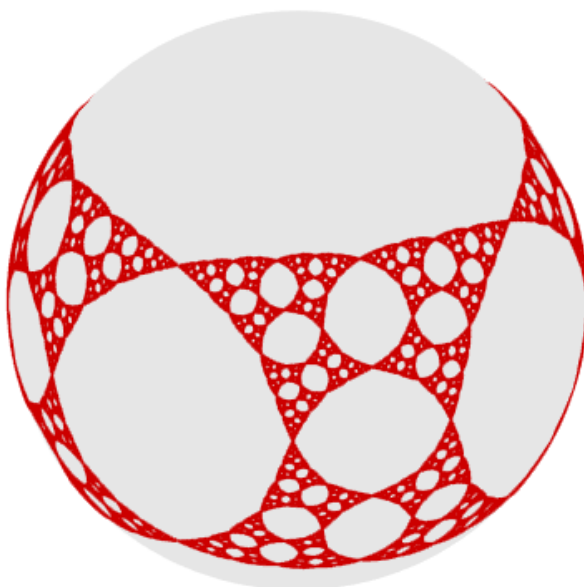


Následující vizualizace demonstruje výslednou geometrii Juliovy množiny pro tento případ. Jelikož už nemáme hyperbolicitu zobrazení, tak Juliova množina nemá tvar kvazikružnice a přecházíme ke složitějšímu tvaru.

Konfigurace IIM

1. Parametry vizualizace (Chaos Game):

Zobrazení:	$p = 1$
Počet iterací:	$N = 10^7$
Počáteční bod:	$z_0 = 0$



Obrázek 5.6: Juliova množina funkce f_p , pro $p = 1$ s počtem iterací 10^7

Souhrnné výsledky a parametry analýzy dimenzí

Parametr systému: $p = 1$

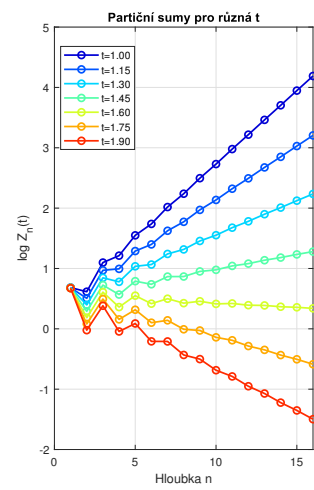
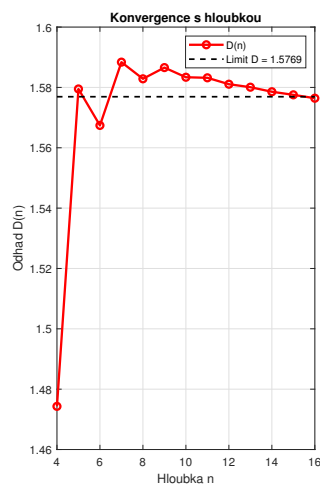
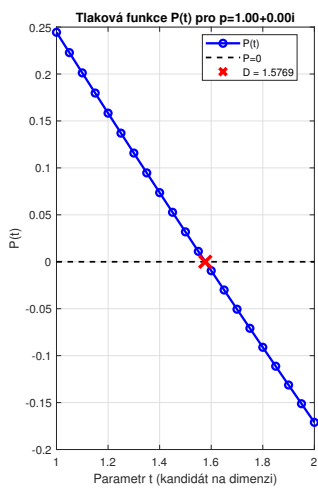
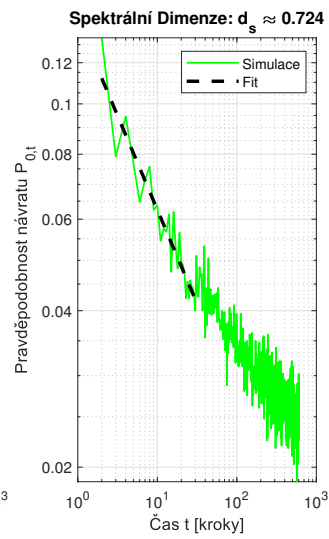
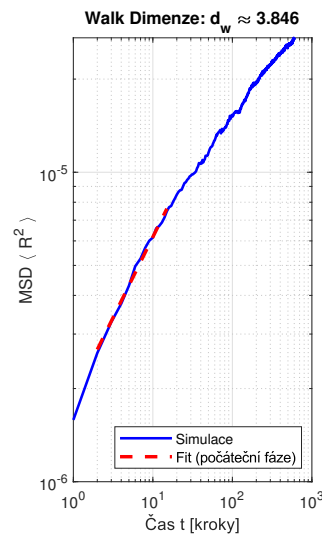
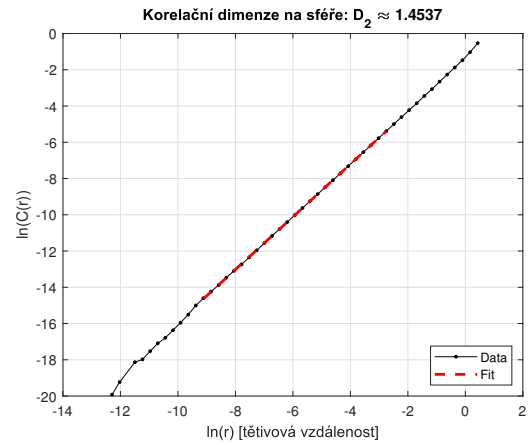
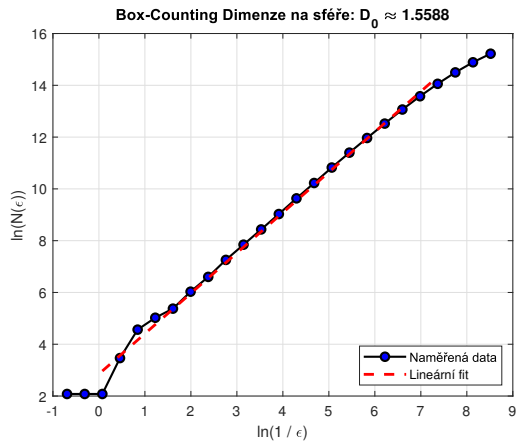
Naměřené hodnoty

- **Box-counting dimenze:** $D_0 \approx 1,5590$
- **Korelační dimenze:** $D_2 \approx 1,4725$
- **Bowenova dimenze:** $D_{Bowen} = 1,5619$
- **Dimenze náhodné procházky:** $d_w \approx 3,846$
- **Spektrální dimenze:** $d_s \approx 0,724$
- **Alexander-Orbachova domněnka:** $D_H \approx 1,3923$

Nastavení algoritmů

- **Box-counting (D_0):**
 - Rozsah velikosti boxů: $\epsilon \in \langle 2, 0,00002 \rangle$
- **Korelační (D_2):**
 - Rozsah poloměrů: $r \in \langle 2, 10^{-3} \rangle$
- **Bowenova (D_{Bowen}):**
 - Metoda: Hledání kořene tlakové funkce $P(t) = 0$
 - Chyba: $\pm 0,0053$
 - Hloubka rekurze / Počet preimagů: $k = 16$
- **Náhodná procházka (D_w) a Spektrální (D_s):**
 - Počet chodců (Walkers): $W = 4000$
 - Maximální čas (kroky): $T_{max} = 600$

Pro doložení věrohodnosti uvedených výsledků přikládáme grafické výstupy jednotlivých analýz. Následující panely zobrazují logaritmické závislosti naměřených veličin, ze kterých byly konkrétní hodnoty dimenzí získány pomocí lineární regrese v příslušné škálovací oblasti.



Získané numerické výsledky jsou ve shodě s teoretickými očekáváními pro tento typ dynamiky. Ačkoliv je pro standardní aplikaci Bowenovy dimenze obvykle vyžadována striktní hyperbolicita, naše

analýza ukazuje, že použitý termodynamický formalismus zůstává platný i pro tento případ.

Důvodem úspěšné konvergence algoritmu je specifická topologie zobrazení $f_1(z) = \frac{z^2+1}{1-z^2}$. Klíčovou roli zde hraje chování kritického bodu $z_c = 0$. Analýza jeho orbity ukazuje následující vývoj:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow \infty \rightarrow -1 \rightarrow \infty \dots$$

Kritický bod je tedy předperiodický, po konečném počtu kroků skončí v cyklu zahrnujícím nekonečno ($\infty \leftrightarrow -1$). Taková zobrazení, vykazují stabilitu blízkou hyperbolickým systémům. Kritický bod totiž neinterferuje s rekurencí na Juliově množině (nespadne do ní, ale uteče do nekonečna), což umožňuje korektní aplikaci Bowenova vzorce. Více v [38].

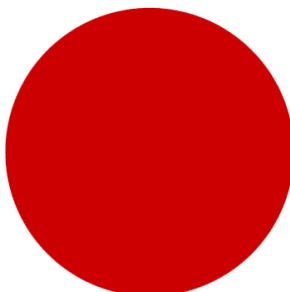
Výsledky ostatních měření můžeme interpretovat následovně:

- Na rozdíl od předchozích měření zde metoda box-counting funguje s velmi dobrou přesností a téměř dokonale se shoduje s referenční Bowenovou dimenzí. Tato shoda ukazuje, že mřížková metoda dokáže efektivně zachytit i tuto dendritickou strukturu.
- Nižší hodnota korelační dimenze poukazuje na nerovnoměrné rozložení hustoty bodů, což je pro takto složité fraktály typické. Na rozdíl od předchozích případů vidíme, že korelační dimenze funguje hůře, než mřížková.
- Alexander-Orbachova domněnka 1,3923 vykazuje výraznou odchylku od referenčních hodnot. Stejně jako u všech předchozích měření v této práci i tato metoda skutečnou dimenzi silně podhodnocuje a potvrzuje se tak její nevhodnost pro kvantifikaci těchto množin.

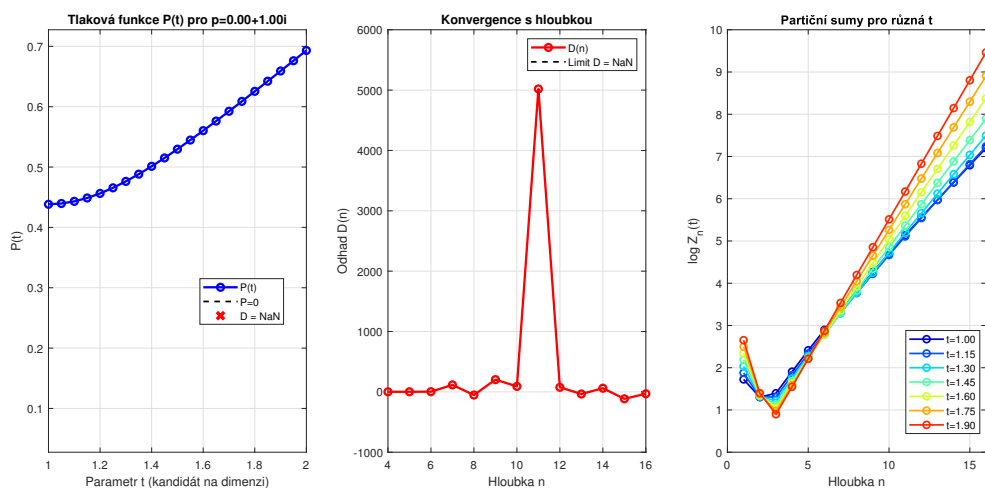
Zajímavostí je, že zatímco například u Mandelbrotovy množiny byla v práci [30] pozorována tendence metody box-counting výrazně podhodnocovat skutečnou dimenzi, naše numerické experimenty pro funkci f_p tento nedostatek nevykazují, ani pro poměrně velké p a výsledné dimenze Juliovy množiny vycházejí velmi blízko skutečné hodnotě.

5.3 Omezení výpočtu dimenze

V této kapitole se zaměříme na kritické zhodnocení limitů použitých numerických metod. Jako testovací scénář volíme parametr $p = i$. Jak je patrné z vizualizace na obrázku níže, Juliova množina v tomto případě netvoří fraktální strukturu, ale zcela vyplňuje Riemannovu sféru.

Obrázek 5.8: Juliova množina funkce f_p , pro $p = i$ s počtem iterací 10^7

Tento případ odhaluje omezení některých výpočetních postupů. Konkrétně metoda výpočtu dimenze pomocí Bowenova vzorce zde naráží na své limity a nelze ji použít. Pro takového případ se tedy spoléháme výhradně na geometrické metody. Protože známe analytickou hodnotu dimenze sféry $D = 2$, můžeme přímo posoudit funkčnost aproximací pomocí mřížkové dimenze.

Obrázek 5.9: Tvar tlakové funkce pro hodnotu parametru $p = i$

Jak je vidět na grafech výše, tak tlaková funkce, pomocí které počítáme aproximaci Hausdorffovy dimenze nemá kořen. Tedy tato metoda nedává žádný výsledek. Tato metoda tedy opravdu funguje, jen pro malou množinu parametrů, pro které je funkce f_p hyperbolická, nebo pro další speciální případy, kdy je tato tlaková funkce aspoň klesající.

Stále nám však zůstává možnost použít box-counting a korelační algoritmus. Výsledky jsou následující:

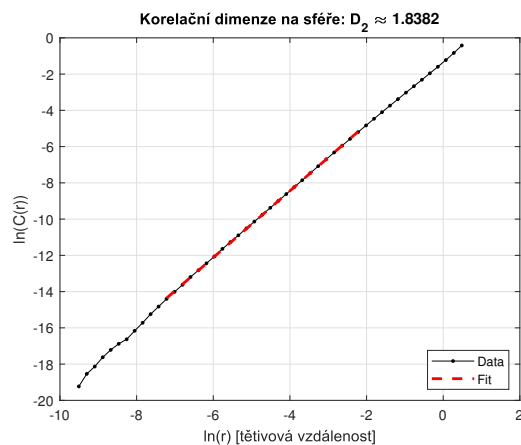
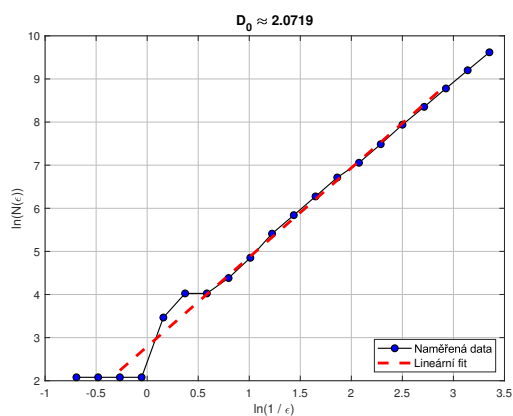
Souhrnné výsledky a parametry analýzy dimenzí

Parametr systému: $p = i$

Metoda	Hodnota	Nastavení (rozsah)
Box-counting	$D_0 \approx 2,0719$	$\epsilon \in \langle 2; 3 \cdot 10^{-3} \rangle$
Korelační	$D_2 \approx 1,8382$	$r \in \langle 2; 10^{-3} \rangle$

Hodnoty jsou v tomto případě opět blízké skutečné hodnotě dimenze 2. Hodnota box-counting algoritmu je o něco bližší, její hodnota je mírně nadhodnocena. Naopak korelační dimenze o něco více podhodnocuje aproximovanou dimenzi. Toto potvrzuje trend viditelný v této práci, že pro aproximaci množin, které mají tvar kvazikružnic je vhodnější korelační dimenze. Naopak pro složitější množiny je vhodnější box-counting.

Pro úplnost přidávám závislosti, ze kterých jsme tyto hodnoty získali:



Závěr

Předložená diplomová práce se zabývala studiem nelineární dynamiky v kontextu kvantových purifikačních protokolů. Hlavním cílem práce bylo analyzovat stabilitu těchto protokolů pomocí nástrojů komplexní analýzy a fraktální geometrie, a to specificky pro případy, kdy jsou lokální operace zatíženy systematickou chybou.

V teoretické části jsme nejprve popsali fyzikální podstatu problému – přechod od ideálních kvantových hradel k reálným operacím zatíženým šumem. Na základě analýzy Deuschova protokolu a jeho zobecnění pro nedokonalé operace jsme odvodili klíčové iterované zobrazení $f_p(z)$. Toto zobrazení, závislé na komplexním chybovém parametru p , představuje matematický model vývoje věrnosti a fáze kvantového stavu.

V navazující části práce jsme se detailně věnovali analýze pevných bodů tohoto zobrazení. V rámci řešení jsme navrhli a implementovali algoritmy pro numerické vyhledávání pevných a periodických bodů v komplexní rovině. Součástí této analýzy byl i inverzní problém v prostoru parametrů, pro který jsme vytvořili algoritmy schopné nalézt takové hodnoty parametru p , které generují specifické typy periodických orbit. Tyto nástroje nám umožnily klasifikovat dynamiku systému v závislosti na nastavení poruchy.

Další kapitola byla věnována studiu fraktální dimenze vznikajících Juliových množin. Byly zde podrobně popsány a následně aplikovány algoritmy pro numerický výpočet dimenze, konkrétně metoda box-counting, metoda výpočtu korelační dimenze, dimenze náhodné procházky a úzce spjatou spektrální dimenzi. Nakonec jsme představili přístup pomocí Bowenova vzorce.

Numerickou validaci implementovaných algoritmů jsme provedli na případě jednotkové kružnice, pro kterou je teoretická hodnota dimenze známa. Získané výsledky potvrdily správnost a přesnost našich metod. Následná analýza hyperbolických zobrazení pro malé hodnoty parametru p již představuje původní výsledky této práce. Při srovnání použitých metod se ukázalo, že jejich efektivita silně závisí na topologii zkoumané množiny. Pro malé hodnoty parametru p , kdy má Juliova množina charakter zvrásněné kružnice, se jako výrazně přesnější ukázala metoda výpočtu korelační dimenze. Metoda box-counting v této oblasti narážela na limity. Naopak pro větší hodnoty parametru p , kdy struktura množiny složitěji vyplňuje fázový prostor, se metoda Box-counting ukázala jako velmi efektivní a robustní nástroj.

Navzdory jejich dobré použitelnosti pro reálné případy se přístup pomocí spektrální dimenze a dimenze náhodné procházky v kontextu našeho zobrazení f_p ukázaly jako nevhodné. Výsledky získané těmito algoritmy byly systematicky podhodnocené a neodpovídaly hodnotám ověřeným na testovacích množinách, ani výsledkům geometrických metod. Z tohoto důvodu jsme tyto přístupy vyhodnotili jako neefektivní pro analýzu dimenze v námi zkoumaném modelu.

Významného úspěchu jsme dosáhli aplikací termodynamického formalismu, konkrétně výpočtem dimenze pomocí Bowenova vzorce. Numerické experimenty prokázaly, že tento přístup poskytuje velmi přesné a robustní odhady pro hyperbolických zobrazení, kde svými výsledky výrazně převyšuje všechny ostatní testované přístupy. Díky exponenciální rychlosti konvergence se tento algoritmus ukázal jako výpočetně nejefektivnější a nevhodnější nástroj pro aproximaci Hausdorffovy dimenze studovaných Juliových množin.

Literatura

- [1] J. Milnor: *Dynamics in One Complex Variable (3rd ed.)*. Princeton University Press, 2006.
- [2] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [3] M. Malachov: *Chaotic dynamics of purification protocols*. Dissertation Thesis, Czech Technical University in Prague, 2023.
- [4] P. W. Shor: *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*. Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 1994.
- [5] L. K. Grover: *A fast quantum mechanical algorithm for database search*. Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1996.
- [6] W. H. Zurek: *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*. Reviews of Modern Physics, 75(3):715, 2003.
- [7] M. A. Nielsen, I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [8] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, W. K. Wootters: *Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels*. Physical Review Letters, 76:722, 1996.
- [9] D. Deutsch, A. Ekert, R. Jozsa, C. Macchiavello, S. Popescu, A. Sanpera: *Quantum Privacy Amplification and the Security of Quantum Cryptography over Noisy Channels*. Physical Review Letters, 77:2818, 1996.
- [10] K. Falconer: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2003.
- [11] A. Douady, J. H. Hubbard: *Etude dynamique des polynômes complexes*. Publications Mathématiques d'Orsay, 1984.
- [12] L. Carleson, T. W. Gamelin: *Complex Dynamics*. Springer-Verlag New York, 1993.
- [13] A. F. Beardon: *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. Springer New York, 1991.
- [14] M. Lyubich: *The dynamics of rational transforms: the topological picture*. Russian Mathematical Surveys, 41(4):43, 1986.
- [15] O. Giraud, B. Georgeot, D. L. Shepelyansky: *Quantum computing of delocalization in small-world networks*. Physical Review E, 80(2):026210, 2009.

- [16] M. Hein, J. Eisert, H. J. Briegel: *Multiparty entanglement in graph states*. Physical Review A, 69(6):062311, 2004.
- [17] R. Raussendorf, H. J. Briegel: *A one-way quantum computer*. Physical Review Letters, 86(22):5188–5191, 2001.
- [18] S. Nonnenmacher, M. Zworski: *Fractal Weyl laws for open quantum chaotic maps*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38:10683, 2005.
- [19] K. Życzkowski, H. J. Sommers: *Truncations of random unitary matrices*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 33:2045, 2000.
- [20] J. Maláček: *Matematické metody komplexní dynamiky*. Výzkumný úkol, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2025.
- [21] T. Kiss, I. Jex, G. Alber, S. Vymětal: *Complex chaos in the conditional dynamics of qubits*. Phys. Rev. A, 74:040301, 2006.
- [22] C. L. Siegel: *Iteration of analytic functions*. Annals of Mathematics, 43(4):607–612, 1942.
- [23] A. D. Brjuno: *Analytical form of differential equations. I*. Transactions of the Moscow Mathematical Society, 25:131–288, 1971.
- [24] M. Shishikura: *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*. Annals of Mathematics, 147(2):225, 1998.
- [25] C. Kruszynska, A. Miyake, H. J. Briegel, W. Dür: *Entanglement purification protocols for all graph states*. Physical Review A, 74:052316, 2006.
- [26] R. Pérez-Marco: *Fixed points and circle maps*. Acta Mathematica, 179(2):243–294, 1997.
- [27] G. A. Edgar: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. 2nd edition, Springer-Verlag New York, 2008.
- [28] D. Ruelle: *Thermodynamic Formalism*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 5, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1978.
- [29] C. T. McMullen: *Hausdorff dimension and conformal dynamics III: Computation of dimension*. American Journal of Mathematics, 120(4):691–721, 1998.
- [30] P. Pauš: *Počítačové metody analýzy fraktálních množin*. Diplomová práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2006.
- [31] K. Foroutan-pour, P. Dutilleul, D. L. Smith: *Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation*. Applied Mathematics and Computation, 105:195–210, 1999.
- [32] Y. Huang, Y. Gu, S. Wang: *How to get reliable fractal dimension by box-counting*. Peking University, 1996.
- [33] P. Grassberger, I. Procaccia: *Characterization of strange attractors*. Physical Review Letters, 50(5):346–349, 1983.
- [34] A. Rényi: *On measures of entropy and information*. In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1:547–561, 1961.

- [35] H. G. E. Hentschel, I. Procaccia: *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*. Physica D, 8(3):435–444, 1983.
- [36] J. Maláček: *Matematická analýza invariantních množin*. Bakalářská práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2023.
- [37] R. Bowen: *Hausdorff dimension of quasi-circles*. Publications Mathématiques de l’IHÉS, 50:11–25, 1979.
- [38] F. Przytycki, M. Urbański: *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*. Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series 371, 2010.
- [39] M. Muraio, M. B. Plenio, S. Popescu, V. Vedral, P. L. Knight: *Quantum state distillation for multi-particle entanglement*. Physical Review A, 57(6):R4075–R4078, 1998.
- [40] W. Dür, H. Aschauer, H.-J. Briegel: *Multiparticle entanglement purification for graph states*. Physical Review Letters, 91(10):107903, 2003.
- [41] Á. Rozgonyi et al.: *Training iterated protocols for distillation of GHZ states with variational quantum algorithms*. Physics Letters A, 499:129349, 2024.
- [42] G. Verdon, J. Pye, M. Broughton: *A universal training algorithm for quantum deep learning*. arXiv:1806.09729, 2018.
- [43] F. Takens: *On the numerical determination of the dimension of an attractor*. In: Dynamical Systems and Bifurcations, Springer, Lecture Notes in Mathematics 1125, 99–106, 1985.
- [44] F. Gašpar, J. Kukul: *Stochastic modelling of fractal diffusion and dimension estimation*. Physica A, 602:127624, 2022.